

线性代数 (同济四版) 习题参考答案

黄正华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072



WUHAN UNIVERSITY

目 录

第一章	行列式	1
第二章	矩阵及其运算	17
第三章	矩阵的初等变换与线性方程组	33
第四章	向量组的线性相关性	48
第五章	相似矩阵及二次型	70

第一章 行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-4) \times 3 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \times 8 - 0 \times 1 \times 3 - 2 \times (-1) \times 8 - 1 \times (-4) \times (-1) \\ &= -24 + 8 + 16 - 4 \\ &= -4. \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - bbb - aaa - ccc = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ac^2 - ba^2 - cb^2 = (a-b)(b-c)(c-a).$$

$$\begin{aligned} (4) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} &= x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - y^3 - (x+y)^3 - x^3 \\ &= 3xy(x+y) - y^3 - 3x^2y - 3y^2x - x^3 - y^3 - x^3 \\ &= -2(x^3 + y^3). \end{aligned}$$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;

(2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1;

(4) 2 4 1 3;

(5) 1 3... (2n-1) 2 4... (2n);

(6) 1 3... (2n-1) (2n) (2n-2)... 2.

解

(1) 逆序数为 0.

(2) 逆序数为 4: 4 1, 4 3, 4 2, 3 2.

(3) 逆序数为 5: 3 2, 3 1, 4 2, 4 1, 2 1.

(4) 逆序数为 3: 2 1, 4 1, 4 3.

(5) 逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$;

$3\ 2\ \dots\dots\dots 1$ 个
 $5\ 2, 5\ 4\ \dots\dots\dots 2$ 个
 $7\ 2, 7\ 4, 7\ 6\ \dots\dots\dots 3$ 个
 $\dots\dots\dots$
 $(2n-1)\ 2, (2n-1)\ 4, (2n-1)\ 6, \dots, (2n-1)\ (2n-2)\ \dots\dots\dots (n-1)$ 个

(6) 逆序数为 $n(n-1)$:

$3\ 2\ \dots\dots\dots 1$ 个
 $5\ 2, 5\ 4\ \dots\dots\dots 2$ 个
 $7\ 2, 7\ 4, 7\ 6\ \dots\dots\dots 3$ 个
 $\dots\dots\dots$
 $(2n-1)\ 2, (2n-1)\ 4, (2n-1)\ 6, \dots, (2n-1)\ (2n-2)\ \dots\dots\dots (n-1)$ 个
 $4\ 2\ \dots\dots\dots 1$ 个
 $6\ 2, 6\ 4\ \dots\dots\dots 2$ 个
 $\dots\dots\dots$
 $(2n)\ 2, (2n)\ 4, (2n)\ 6, \dots, (2n)\ (2n-2)\ \dots\dots\dots (n-1)$ 个

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解: 由定义知, 四阶行列式的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4},$$

其中 t 为 $p_1 p_2 p_3 p_4$ 的逆序数.

由于 $p_1 = 1, p_2 = 3$ 已固定, $p_1 p_2 p_3 p_4$ 只能形如 $13\square\square$, 即 1324 或 1342 . 对应的逆序数 t 分别为

$$0 + 0 + 1 + 0 = 1, \text{ 或 } 0 + 0 + 0 + 2 = 2.$$

所以, $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

4. 计算下列各行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 10r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + 7r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 17 \times 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

(2) 注意到 $r_1 + r_2 = r_4$, 所以原行列式值为 0.

$$(3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_2+r_1}{r_3+r_1} adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -adfbce \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{按第 1 列} \\ \text{展开}}} (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{按第 3 行} \\ \text{展开}}} (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix} = abcd + ab + cd + ad + 1.$$

5. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} = (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

$$(2) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

证明:

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{按第 1 列} \\ \text{分裂开}}} a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{再次} \\ \text{裂开}}} a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{再次} \\ \text{裂开}}} a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 (-1)^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

此题有一个“经典”的解法:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix} \\ & = a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \\ & = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这个解法“看上去很美”，实则是一个错解！我们强调，行列式不能作这种形式上的加法：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

证明:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2,3,4]{c_j - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[c_4 - 3c_2]{c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{两列成比例}} 0. \end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

证明:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2,3,4]{c_j - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 & d^2 - a^2 \\ a^4 & b^4 - a^4 & c^4 - a^4 & d^4 - a^4 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{展开 } r_1} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2 - a^2 & c^2 - a^2 & d^2 - a^2 \\ b^2(b^2 - a^2) & c^2(c^2 - a^2) & d^2(d^2 - a^2) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\frac{c_2-c_1}{c_3-c_1}}{=} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{展开 } r_1}{=} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix} \\
 &= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).
 \end{aligned}$$

$$(5) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

证明: 方法一. 设法把主对角线上的 x 变为 0, 再按第一列展开.

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\frac{c_{n-1}+xc_n}{}}{=} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\frac{c_{n-2}+xc_{n-1}}{}}{=} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^3+a_1x^3+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\frac{c_j+xc_{j-1}}{}}{=} \begin{vmatrix} & & 0 & & -1 & & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & & 0 & & \cdots & -1 & 0 \\ & & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^3+a_1x^3+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 & & \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & 0 & & -1 & & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & & 0 & & \cdots & -1 & 0 \\ & & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & -1 \\ x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 & & & & \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\
&= (x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\
&= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.
\end{aligned}$$

方法二. 设法把 -1 全部变为 0 , 得到一个下三角矩阵.

若 $x = 0$, 则 $D_n = a_n$. 等式成立.

若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}
D_n &\stackrel{c_2 + \frac{1}{x}c_1}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} + \frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{c_3 + \frac{1}{x}c_2}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} + \frac{a_n}{x} & a_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1} + \frac{a_n}{x} & a_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

这里,

$$\begin{aligned}
P_2 &= a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-2}}, \\
P_1 &= x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}}.
\end{aligned}$$

得到下三角阵, 所以

$$D_n = x^{n-1} \cdot P_1 = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

方法三. 用递归法证明. 记

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \underline{\underline{c_1 + xc_2}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{c_1 + x^2c_3}} \\ \vdots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{cccccc} 0 & & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{array} \right| \\ \\ = \dots \\ \\ \left| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{array} \right|, \end{array}
\end{aligned}$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$.

再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

6. 设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90° 、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$, $D_3 = D$.

证明:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{\substack{n-1 \text{ 次行的相邻互换} \\ (-1)^{n-1}}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{\substack{n-2 \text{ 次行的相邻互换} \\ (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \dots \\
&= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \cdots (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)} D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.
\end{aligned}$$

同理可证

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D = (-1)^{n(n-1)} D = D.$$

7. 计算下列各行列式 (D_k 为 k 阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}, \text{ 其中对角线上元素都是 } a, \text{ 未写出的元素都是 } 0;$$

解: 方法一. 将 c_n 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

再将 r_n 作 $n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_n = (-1)^{n-2} (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} = (a^2 - 1)a^{n-2}.$$

方法二.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{展开 } c_1}{=} a \begin{vmatrix} a & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + 1 \times (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$\stackrel{\text{展开 } r_1}{=} a^n + (-1)^{n+1} \times 1 \times (-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

$$= a^n - a^{n-2}.$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

解: 方法一. 将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法二. 将各列都加到第一列得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法三. 升阶法.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \xrightarrow[\substack{r_i - r_1 \\ i=2,3,\dots}]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

若 $x = a$, 则 $D_n = 0$. 若 $x \neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a}c_j$ 加到 c_1 , $j = 2, 3, \dots, n+1$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \frac{a}{x-a}n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\ = \left(1 + \frac{na}{x-a}\right) (x-a)^n = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \text{ (提示: 利用范德蒙德行列式的结果.)}$$

解: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 n 次相邻对换, 换到第 1 行; 第 n 行经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 经 $n+(n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得 (或者直接由题 6 的结论)

$$D_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此行列式为范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法知, 这里的 $a = x_1, a-1 = x_2, \dots, a-(n-1) = x_n, a-n = x_{n+1}$. 则 $x_i = a-(i-1), x_j = a-(j-1)$. 所以

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [(a-i+1) - (a-j+1)] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [-(i-j)] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \times \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j) \\ &= \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j). \end{aligned}$$

或者: 把原行列式逆时针旋转 180° (即作两次逆时针旋转 90°), 由题 6 的结论, 易知

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^{n-1} & (a-(n-1))^{n-1} & \cdots & a^{n-1} \\ (a-n)^n & (a-(n-1))^n & \cdots & a^n \end{vmatrix},$$

对照范德蒙德行列式的写法知, $x_1 = (a-n), x_2 = (a-n)+1, x_3 = (a-n)+2, \dots, x_i = (a-n)+(i-1)$, 所以 $x_i - x_j = i-j$, 得

$$D_{n+1} = \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) = \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j).$$

$$(4) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & 0 & & b_n \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & a_1 & b_1 & 0 \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_n & & 0 & & d_n \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \frac{r_i - r_{i+1}}{i=1,2,\dots} \\ \hline \hline \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 & \begin{array}{c} \frac{c_j + c_1}{j=2,3,\dots} \\ \hline \hline \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\
 & = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.
 \end{aligned}$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

解: 升阶法.

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
 & \begin{array}{c} \frac{r_i - r_1}{i=2,3,\dots} \\ \hline \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
 & \begin{array}{c} \frac{c_1 + \frac{1}{a_1} c_2}{\hline \hline} \\ \hline \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
 & \begin{array}{c} \frac{c_1 + \frac{1}{a_j} c_{j+1}}{j=2,3,\dots} \\ \hline \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
 & = (a_1 a_2 \cdots a_n) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).
 \end{aligned}$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = -142.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ -2 & -3 & 5 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -10 \\ 0 & -5 & -18 \\ -2 & 5 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -10 \\ -4 & 0 & 10 \\ 23 & 0 & -22 \end{vmatrix} = -142;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -7 \\ 0 & -15 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & 11 \\ 0 & 0 & 39 & 31 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 11 \\ 39 & 31 \end{vmatrix} = -284;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142.$$

所以,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$$

$$(2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 & = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = 0, \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 & = 0, \\ x_4 + 5x_5 & = 1. \end{cases}$$

解: 系数行列式

$$\begin{aligned} D_{5 \times 5} &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & & & \\ 1 & 5 & 6 & & \\ & 1 & 5 & 6 & \\ & & 1 & 5 & 6 \\ & & & 1 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{\text{展开 } c_1}{=} 5D_{4 \times 4} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{4 \times 4} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{4 \times 4} - 6D_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

由递归式 $D_{5 \times 5} = 5D_{4 \times 4} - 6D_{3 \times 3}$ 知,

$$D_{3 \times 3} = 5D_{2 \times 2} - 6D_{1 \times 1} = 5(25 - 6) - 6 \times 5 = 65,$$

$$D_{4 \times 4} = 5D_{3 \times 3} - 6D_{2 \times 2} = 5 \times 65 - 6 \times 19 = 211,$$

$$D_{5 \times 5} = 5D_{4 \times 4} - 6D_{3 \times 3} = 5 \times 211 - 6 \times 65 = 665.$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_1} D_{4 \times 4} + \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= D_{4 \times 4} + 6^4 = 211 + 6^4 = 1507.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{5+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_2} -D_{3 \times 3} - 5 \times 6^3 = -65 - 1080 = -1145.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_3} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{5+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_2} D_{2 \times 2} - 6 \times 6 \times D_{2 \times 2} = 703.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_4} (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{5+4} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_4} -5 - 6D_{3 \times 3} = -5 - 6 \times 65 = -395.$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_5} (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + D_{4 \times 4} = 1 + 211 = 212.$$

所以,

$$x_1 = \frac{1507}{665}, \quad x_2 = -\frac{1145}{665}, \quad x_3 = \frac{703}{665}, \quad x_4 = -\frac{395}{665}, \quad x_5 = \frac{212}{665}.$$

用克拉默法则解题没什么实用性, 其贡献在理论上的重要意义. 比如这个题目用消元法要简便得多. 熟知克拉默法则的内容就可以了, 这个题目可以弃之不做.

9. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{有非零解?}$$

解: 系数矩阵

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = \mu(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu(1-\lambda).$$

要使齐次线性方程组有非零解, 则 $D = 0$, 即

$$\mu(1-\lambda) = 0,$$

得 $\mu = 0$ 或 $\lambda = 1$.

10. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 & -2x_2 & +4x_3 = 0, \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2 & & +x_3 = 0, \\ x_1 & +x_2+(1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$ 有非零解?

解: 系数矩阵

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3+\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3) - 4(1-\lambda) + (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)(-3+\lambda) \\ &= (1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda)^2 + \lambda - 3 \\ &= \lambda(\lambda-2)(3-\lambda). \end{aligned}$$

齐次线性方程组有非零解, 则 $D = 0$, 即

$$\lambda(\lambda-2)(3-\lambda) = 0.$$

得 $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ 或 $\lambda = 3$.

第二章 矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解: 方法一. 用消元法解方程, 得出 y_1, y_2, y_3 . 略.

方法二. 解矩阵方程. 由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

方法三. 用克拉默法则解方程. 系数矩阵

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 - 2c_3 \\ c_2 - 2c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & -9 & 5 \\ -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

所以,

$$y_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 5 \\ x_3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3;$$

同理得 $y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$.

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解: 方法一. 直接代入. 比如:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + y_3 \\ &= 2(-3z_1 + z_2) + (-z_2 + 3z_3) \\ &= -6z_1 + z_2 + 3z_3. \end{aligned}$$

方法简单,但我们应尽可能使用本章学习的矩阵知识.

方法二. 由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3, \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$.

解:

$$\begin{aligned} 3AB - 2A &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2);$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 7 + 3 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 7 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 \\ 5 \times 7 + 7 \times 2 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

$$(2) (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10) = 10.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2) = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 2 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $AB = BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 吗?

解: (1) 因为

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

所以,

$$AB \neq BA.$$

(2) 因为

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix},$$

但

$$\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix},$$

故

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2.$$

(3) 因为

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

故

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

当然, 一个简单的说法是, 在得到 $AB \neq BA$ 之后, 直接有

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2. \end{aligned}$$

6. 举反例说明下列命题是错误的:

- (1) 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$;
- (2) 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{E}$;
- (3) 若 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, 则 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

解: (1) 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, 但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$.

(2) 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$.

(3) 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 但 $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$.

题 5 和题 6 看上去很简单, 实则是再次提醒我们注意矩阵运算不满足交换律, 不满足零律, 不满足消去律. 这是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点“相同”而忘记二者本质的不同.

这种不同的讨论范围里的“加法”、“乘法”, 还有很多很多, 在现代数学里非常广泛和一般.

7. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^k$.

解: 由计算

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

猜测: $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix}$. 下用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时, 显然成立. 假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

由数学归纳法知: $\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

8. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A}^k .

解: 方法一. 首先计算

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

猜测: $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$, ($n \geq 2$).

下用数学归纳法证明:

当 $n=2$ 时, 显然成立.

假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由数学归纳法得证: $\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$.

上面的猜测其实是不容易得到的. 这里另有一个解法.

方法二. 记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \lambda \mathbf{E} + \mathbf{B}.$$

则¹

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n \\ &= (\lambda \mathbf{E})^n + C_n^1 (\lambda \mathbf{E})^{n-1} \mathbf{B} + C_n^2 (\lambda \mathbf{E})^{n-2} \mathbf{B}^2 + \cdots + \mathbf{B}^n. \end{aligned}$$

注意到

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{B}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (k \geq 3).$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n \\ &= (\lambda \mathbf{E})^n + C_n^1 (\lambda \mathbf{E})^{n-1} \mathbf{B} + C_n^2 (\lambda \mathbf{E})^{n-2} \mathbf{B}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 \lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶矩阵, 且 \mathbf{A} 为对称矩阵, 证明 $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ 也是对称矩阵.

证明: 即要证 $(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$.

已知 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 由公式 $(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 知

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T &= ((\mathbf{B}^T \mathbf{A}) \mathbf{B})^T \\ &= \mathbf{B}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{A})^T \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

得证 $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ 是对称阵.

10. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 n 阶对称矩阵, 证明 $\mathbf{A} \mathbf{B}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$.

证明: 已知 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \mathbf{B}^T = \mathbf{B}$, 要证

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{A} \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}.$$

¹注意对一般的矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} , 并不能对 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n$ 得到牛顿二项式展开式. 比如最简单的情形

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B}^2,$$

我们就知道其不一定成立. 除非 \mathbf{A}, \mathbf{B} 可交换. 而这里的 $\lambda \mathbf{E}, \mathbf{B}$ 当然是可交换的.

充分性: 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. 又

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA},$$

所以, $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$. 即 \mathbf{AB} 是对称矩阵.

必要性: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$. 又

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA},$$

所以, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

解: (1) 由 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = 1 \neq 0$, 所以 \mathbf{A} 可逆. 又

$$A_{11} = 5, \quad A_{21} = 2 \times (-1), \quad A_{12} = 2 \times (-1), \quad A_{22} = 1.$$

得

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$$

$$\text{故 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

建议记住教材 P.44 例 10 的结论:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

其中 $ad - cb \neq 0$.

$$(2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

解: $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1$, 由上述结论得

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

解: $|\mathbf{A}| = 2$, 故 \mathbf{A}^{-1} 存在. 又

$$A_{11} = -4,$$

$$A_{21} = 2,$$

$$A_{31} = 0,$$

$$A_{12} = -13,$$

$$A_{22} = 6,$$

$$A_{32} = -1,$$

$$A_{13} = -32,$$

$$A_{23} = 14,$$

$$A_{33} = -2.$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

解: 由对角矩阵的性质知

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{解: } (1) \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

解:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

解:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$$

解: (1) 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解: 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

14. 设 $A^k = O$ (k 为正整数), 证明

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

证明: 验证

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E$$

即可. 下略.

15. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$, 证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

证明: 直接求逆即可.

由 $A^2 - A - 2E = O$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A(A - E) = 2E \\ &\Rightarrow A \left[\frac{1}{2}(A - E) \right] = E \\ &\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E). \end{aligned}$$

又由 $A^2 - A - 2E = O$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (A + 2E)A - 3(A + 2E) = -4E \\ &\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) = -4E \\ &\Rightarrow (A + 2E) \left[-\frac{1}{4}(A - 3E) \right] = E \\ &\Rightarrow (A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E - A). \end{aligned}$$

这类题目的解法就是要“凑”出要求逆的式子. 比如本题, 要从 $A^2 - A - 2E = O$ 中凑出式子 $A + 2E$.

16. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

解: 由

$$\begin{aligned} |A| |(2A)^{-1} - 5A^*| &= |A(2A)^{-1} - 5AA^*| && (|AB| = |A||B|) \\ &= \left| \frac{1}{2}AA^{-1} - 5AA^* \right| && ((\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}) \\ &= \left| \frac{1}{2}E - 5|A|E \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}E - \frac{5}{2}E \right| && (|A| = \frac{1}{2}) \\ &= |-2E| \\ &= (-2)^3 |E| && (|kA| = k^n |A|) \\ &= -8. \end{aligned}$$

得

$$|(2A)^{-1} - 5A^*| = -16.$$

17. 设矩阵 A 可逆, 证明其伴随矩阵 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明: 验证 $A^*(A^{-1})^* = E$ 即可.

因为

$$(A^{-1}) \cdot (A^{-1})^* = |A^{-1}| E,$$

而

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad \text{即 } A^* = |A| A^{-1},$$

所以

$$A^*(A^{-1})^* = |A| A^{-1} (A^{-1})^* \quad (A^* = |A| A^{-1})$$

$$\begin{aligned} &= |\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| \mathbf{E} & ((\mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A}^{-1})^* &= |\mathbf{A}^{-1}| \mathbf{E}) \\ &= \mathbf{E}. & (|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| &= |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = 1) \end{aligned}$$

得证矩阵 \mathbf{A}^* 可逆, 且 $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$.

18. 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵为 \mathbf{A}^* , 证明:

(1) 若 $|\mathbf{A}| = 0$, 则 $|\mathbf{A}^*| = 0$;

(2) $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明: (1) 反证法. 假设 $|\mathbf{A}^*| \neq 0$, 即 \mathbf{A}^* 可逆. 由 $|\mathbf{A}| = 0$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{E} = \mathbf{O}$.

而 \mathbf{A}^* 可逆, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, 这导致 $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$. 与假设 $|\mathbf{A}^*| \neq 0$ 矛盾. 故当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时有 $|\mathbf{A}^*| = 0$.

(2) 由 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$ 取行列式得到:

$$|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}| \mathbf{E}| = |\mathbf{A}|^n.$$

若 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 则 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

若 $|\mathbf{A}| = 0$ 由 (1) 知 $|\mathbf{A}^*| = 0$ 此时命题也成立.

故有

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

19. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, 求 \mathbf{B} .

解: 由 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ 得

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}$. 求 \mathbf{B} .

解: 由

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{E} &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{B} \\ \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B} &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} \\ \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{E}), \end{aligned}$$

又

$$|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

知 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆. 所以

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $\mathbf{A} = \text{diag}(1, -2, 1)$, $\mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{A} = 2\mathbf{B} \mathbf{A} - 8\mathbf{E}$. 求 \mathbf{B} .

解: 由 $A = \text{diag}(1, -2, 1)$ 知 A 可逆, 且

$$|A| = -2.$$

由

$$\begin{aligned} A^*BA &= 2BA - 8E \\ \Rightarrow A^*B &= 2B - 8A^{-1} && \text{(上式两边右乘 } A^{-1}) \\ \Rightarrow |A|B &= 2AB - 8E && \text{(上式两边左乘 } A) \\ \Rightarrow -2B &= 2AB - 8E && (|A| = -2) \\ \Rightarrow (A + E)B &= 4E, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} (A + E) &= \text{diag}(2, -1, 2), \\ (A + E)^{-1} &= \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

所以

$$B = 4(A + E)^{-1} = \text{diag}(2, -4, 2).$$

22. 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$. 求 B .

解: 解法与上题相似.

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= BA^{-1} + 3E \\ \Rightarrow AB &= B + 3A && \text{(上式两边右乘 } A) \\ \Rightarrow |A|B &= A^*B + 3|A|E && \text{(上式两边左乘 } A^*) \\ \Rightarrow (|A|E - A^*)B &= 3|A|E \end{aligned}$$

由公式 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 又计算得 $|A^*| = 8$, 所以

$$|A|^3 = 8, \text{ 即 } |A| = 2.$$

得

$$(2E - A^*)B = 6E.$$

又

$$\begin{aligned} 2E - A^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \\ (2E - A^*)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{11} .

解: $P^{-1}AP = \Lambda$ 故 $A = P\Lambda P^{-1}$. 所以

$$A^{11} = P\Lambda^{11}P^{-1}.$$

又

$$|P| = 3, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^{11} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}.$$

24. 设 $AP = P\Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(A) = A^8(5E - 6A + A^2)$.

解: 由题设得 $A = P\Lambda P^{-1}$, 注意到 Λ 为对角阵, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$. 又

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= 5A^8 - 6A^9 + A^{10} \\ &= P(5\Lambda^8 - 6\Lambda^9 + \Lambda^{10})P^{-1}. \end{aligned}$$

由 $\Lambda = \text{diag}(-1, 1, 5)$, 则

$$\begin{aligned} \Lambda^8 &= \text{diag}(1, 1, 5^8), \\ \Lambda^9 &= \text{diag}(-1, 1, 5^9), \\ \Lambda^{10} &= \text{diag}(1, 1, 5^{10}), \\ 5\Lambda^8 - 6\Lambda^9 + \Lambda^{10} &= \text{diag}(12, 0, 0). \end{aligned}$$

25. 设矩阵 A, B 及 $A+B$ 都可逆, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆阵.

证明: 由 A, B 及 $A+B$ 都可逆, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, $BB^{-1} = B^{-1}B = E$, 得

$$\begin{aligned} A^{-1} + B^{-1} &= A^{-1}E + EB^{-1} \\ &= A^{-1}BB^{-1} + A^{-1}AB^{-1} \\ &= A^{-1}(B+A)B^{-1} \\ &= A^{-1}(A+B)B^{-1}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (A^{-1} + B^{-1})^{-1} &= [A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1} \\ &= (B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1} \\ &= B(A+B)^{-1}A. \end{aligned}$$

26. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

解:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{E} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

27. 取 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = -\mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 验证

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{C}| & |\mathbf{D}| \end{vmatrix}.$$

解: 因为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2-r_4]{r_1-r_3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

而

$$\begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{C}| & |\mathbf{D}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{C}| & |\mathbf{D}| \end{vmatrix}.$$

28. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & & \mathbf{O} \\ 4 & -3 & & \\ & & 2 & 0 \\ \mathbf{O} & & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|\mathbf{A}^8|$ 及 \mathbf{A}^4 .

解: 记 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

则

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\mathbf{A}^8 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^8 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^8 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^8| &= |\mathbf{A}_1^8| |\mathbf{A}_2^8| = |\mathbf{A}_1|^8 |\mathbf{A}_2|^8 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^8 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^8 \\ &= 10^{16}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & \mathbf{O} \\ 0 & 5^4 & \\ \mathbf{O} & 2^4 & 0 \\ & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

29. 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 及 s 阶矩阵 \mathbf{B} 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1}$;

解: 设

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_{n \times n} \\ \mathbf{B}_{s \times s} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_s \end{pmatrix},$$

其中 \mathbf{C}_1 为 $s \times n$ 矩阵, \mathbf{C}_2 为 $s \times s$ 矩阵, \mathbf{C}_3 为 $n \times n$ 矩阵, \mathbf{C}_4 为 $n \times s$ 矩阵. 又

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_{n \times n} \\ \mathbf{B}_{s \times s} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{C}_3 & \mathbf{A}\mathbf{C}_4 \\ \mathbf{B}\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}\mathbf{C}_2 \end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{C}_3 = \mathbf{E}_n & \Rightarrow \mathbf{C}_3 = \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{A}\mathbf{C}_4 = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{C}_4 = \mathbf{O}, \quad (\mathbf{A}^{-1} \text{ 可逆}) \\ \mathbf{B}\mathbf{C}_1 = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{C}_1 = \mathbf{O}, \quad (\mathbf{B}^{-1} \text{ 可逆}) \\ \mathbf{B}\mathbf{C}_2 = \mathbf{E}_s & \Rightarrow \mathbf{C}_2 = \mathbf{B}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1}$;

解: 设

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

又

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{A}_3 & \mathbf{C}\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{A}_4 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}_1 = \mathbf{E} & \Rightarrow \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_2 = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{A}_2 = \mathbf{O}, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{A}_3 = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{A}_3 = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{A}_4 = \mathbf{E} & \Rightarrow \mathbf{A}_4 = \mathbf{B}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

30. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

解: 由分块对角阵的性质知

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ \hline & & 8 & 3 \\ & & 5 & 2 \end{array} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -2 & & \\ -2 & 5 & & \\ & & 2 & -3 \\ & & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

解: 记 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 又

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

本章的重要题型有两个:

- 解矩阵方程的新方法, 习题 4, 5. 例题见教材 P.65 例 3.
- 方程组解的讨论, 习题 15, 16, 17. 例题见教材 P.76 例 12.

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解: (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div (-2)]{r_2 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 3]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 + r_3]{r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - 2r_2]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 \times 2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 + 3r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \div 2]{r_1 \div 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - 3r_1, r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 \div (-5)]{r_2 \div (-4), r_3 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_1 - 3r_2, r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_1 - 2r_2, r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underbrace{r_2 + 2r_1} \\ \underbrace{r_3 - 8r_1} \\ \underbrace{r_4 - 7r_1} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \times (-1) \\ r_4 - r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A} .

解: 解法一. 可以按照求矩阵方程 $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ 的一般方法求解. 由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \times (-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} c_3 - c_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

解法二. 记 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. 注意到 \mathbf{A} 两边乘以的是初等矩阵, 可知矩阵 \mathbf{B} 是把 \mathbf{A} 进行初等变换

$r_1 \leftrightarrow r_2$ 和 $c_3 + c_1$ 得到的. 所以要得到 \mathbf{A} , 需要将 \mathbf{B} 进行初等变换 $c_3 - c_1$ 和 $r_1 \leftrightarrow r_2$. 即

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} c_3 - c_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

解法三. 还有一种看法是把 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 变为单位阵, 这相当于在 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

两边分别左乘、右乘了相应的初等矩阵, 那么矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 也要进行相应的行变换、列变换, 即:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (\text{两边同时 } r_1 \leftrightarrow r_2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{两边同时 } c_3 - c_1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & | & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

即逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_3 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 + 2r_4]{r_3 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & | & 4 & 2 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & -2 & -1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 3r_3]{r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right)}_{r_1 + 2r_2}$$

故逆矩阵为 $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right)$.

4. (1) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{X} 使 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$;

(2) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{X} 使 $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

解: (1)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 + 2r_3 \\ r_3 \times (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & -4 & 3 & -3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -7 & 2 \\ -4 & 3 & -3 & -4 & 11 & -3 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 & -4 & 11 & -3 \\ \hline 3 & -4 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{c_2 + 4c_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & -4 & -1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{c_3 - 2c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & -4 & -1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & 3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{c_2 - c_3 \\ c_1 - 4c_3 \\ c_3 \times (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 17 & 7 & -4 & 17 & 7 & -4 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{c_1 - 3c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 & -4 & 7 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

所以

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

本题解法与教材 P.65 例 3 相同, 是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型. 在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上

$$\text{已知 } AX = B, \text{ 所以 } X = A^{-1}B.$$

因为 A 是否可逆, 此时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = 2X + A$, 求 X .

解: 由 $AX = 2X + A$ 得

$$\begin{aligned} AX - 2X &= A \\ (A - 2E)X &= A \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} (A - 2E, A) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以

$$X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 在秩是 r 的矩阵中, 有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

解: 由矩阵秩的定义, 在秩是 r 的矩阵中, 至少存在一个不等于 0 的 r 阶子式, 而且所有阶数高于 r 的子式全等于 0. 由此可知, 在秩是 r 的矩阵中, 可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式 (但是不能全等于 0), 也可能存在等于 0 的 r 阶子式.

例如, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(A) = 2$, 其中存在等于 0 的 2 阶子式和 1 阶子式.

7. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B , 问 A, B 的秩的关系怎样?

解: 不妨把题设改为: 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B .

记划去的那一列为 \mathbf{a} , 则

$$A \sim (B, \mathbf{a}).$$

从而,

$$R(A) = R(B, \mathbf{a}).$$

由矩阵秩的性质 5,

$$R(B) \leq R(B, \mathbf{a}) \leq R(B) + 1,$$

所以,

$$R(B) \leq R(A) \leq R(B) + 1.$$

即, $R(A)$ 等于 $R(B)$ 或者 $R(B) + 1$.

8. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 0, 0).$$

解: 符合条件的矩阵有很多, 比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这两个矩阵容易分别变换为行阶梯型、列阶梯型矩阵, 非零行有 4 行.

9. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{r_3 - r_1 \\ r_2 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 2; 或者直接由 $r_1 = 2r_2 + r_3$ 及 r_2, r_3 不成比例, 得秩为 2.

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, 为一个最高阶非零子式.

(2) 因 $r_3 = r_1 + 2r_2$, 又 r_1 与 r_2 不成比例, 所以矩阵秩为 2;

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$, 为一个最高阶非零子式.

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - r_4}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -4 & 12 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{l} r_1 \div 4 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 \div 2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3 - r_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{l} r_1 + r_3 \\ r_2 - r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

所以矩阵秩为 3;

$$\text{三阶子式} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0, \text{ 为一个最高阶非零子式.}$$

10. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ 的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$.

证明: 必要性即教材 P.68 定理 3. 只需证明充分性.

设 $R(\mathbf{A}) = r$, 则 \mathbf{A} 的标准型矩阵为 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

同样, \mathbf{B} 的标准型矩阵也为 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

由矩阵等价的传递性, 得

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}.$$

11. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

问 k 为何值, 可使

(1) $R(\mathbf{A}) = 1$;

(2) $R(\mathbf{A}) = 2$;

(3) $R(\mathbf{A}) = 3$.

解:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} c_2 \div 2 \\ c_3 \div 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ r_3 - kr_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3 - r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

所以, 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(\mathbf{A}) = 3$.

$$\text{当 } k = 1 \text{ 时, } \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(\mathbf{A}) = 1.$$

$$\text{当 } k = -2 \text{ 时, } \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(\mathbf{A}) = 2.$$

另解: 由 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, $R(\mathbf{A}) = 3$, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{\frac{r_3-k r_1}{r_2+r_1}} 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-r_2]{\frac{r_3-r_2}{6}} 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{vmatrix} = -6(k-1)^2(k+2). \end{aligned}$$

所以, 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(\mathbf{A}) = 3$.

余下的讨论与前相同.

12. 求解下列齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解: (1) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1-r_2-r_3]{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_2 \div 3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2+r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_2 = -3x_4, \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, c 为任意实数.

(2) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_2 \div (-4)]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意实数.

(3) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_2 - 2r_1]{r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 9 & -19 & 34 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & -43 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3 + 43r_4]{r_2 - 7r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 327 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

(4) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1 - 2r_2]{r_3 - 2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{3r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{即得} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

$$\text{所以方程组的解为} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \text{ 为任意实数.}$$

13. 求解下列非齐次线性方程组:

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases} & \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases} \\ (3) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases} & \quad (4) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2; \end{cases} \end{aligned}$$

解: (1) 对系数的增广矩阵实施行变换, 有

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_3 - 2r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

看见

$$R(\mathbf{A}) = 2, \text{ 而 } R(\mathbf{B}) = 3,$$

故方程组无解.

(2) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1 - 2r_2]{r_3 - 2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即得

$$\begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = z + 2, \\ z = z. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, c 为任意实数.

(3) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ y = y, \\ z = z, \\ w = 0. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意实数.

(4) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \\ z = z, \\ w = w. \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \text{ 为任意实数.}$$

14. 写出一个以

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

$$\text{解: 把解的形式改写为 } \begin{cases} x_1 = 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

得一个所求的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

15. λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解?

解: (1) 记系数矩阵为 \mathbf{A} , 当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时方程组有惟一解. 由

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

得 $\lambda \neq 1$, 且 $\lambda \neq -2$ 时方程组有惟一解.

(2) $\lambda = -2$ 时,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

知 $R(\mathbf{A}) = 2 < R(\mathbf{B}) = 3$, 此时方程组无解.

(3) $\lambda = 1$ 时,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

知 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = 1$, 此时方程组有无限多解.

我们强调, 这一类的题型是必须掌握的. 更一般的解法是, 通过行变换, 讨论 $R(\mathbf{A})$ 与 $R(\mathbf{B})$ 的关系. 比如这一题,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}.$$

当 $(1 - \lambda)(2 + \lambda) = 0$, 且 $(1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \neq 0$, 即 $\lambda = -2$ 时, 方程组无解. 其他的讨论类似.

16. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

当 λ 取何值时有解? 并求出它的解.

解:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2 + 2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2 + 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix}.$$

要使方程组有解, 须 $(1 - \lambda)(\lambda + 2) = 0$, 得

$$\lambda = 1, \text{ 或 } \lambda = -2.$$

当 $\lambda = 1$ 时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = -2$ 时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

17. 设

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5 - \lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 此方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, 有惟一解.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{r_2+4r_1}{r_1+2r_3}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, 有惟一解.

当 $\lambda = 10$ 时, 增广矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+4r_2} \begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 & 9 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

可见 $R(\mathbf{A}) = 2$, $R(\mathbf{B}) = 3$, 此时方程组无解.

当 $\lambda = 1$ 时, 增广矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组有无限多解. 且原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

18. 证明 $R(\mathbf{A}) = 1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 \mathbf{a} 及非零行向量 \mathbf{b}^T , 使 $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$.

证明: (充分性) 设 $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$. 由矩阵秩的性质 7 有

$$R(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) \leq R(\mathbf{a}). \quad (3.1)$$

又 $R(\mathbf{a}) = 1$, 所以

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) \leq 1. \quad (3.2)$$

但是 $R(\mathbf{A}) \neq 0$, 因为非零向量 \mathbf{a} , \mathbf{b}^T 分别至少存在一个非零元素, 记为 a_i, b_j . 则矩阵 \mathbf{A} 中至少有一个非零元 $a_i b_j$ (即 \mathbf{A} 的一阶非零子式), 从而

$$R(\mathbf{A}) \geq 1. \quad (3.3)$$

综合 (3.2), (3.3), 所以 $R(\mathbf{A}) = 1$.

(必要性) 设 $R(\mathbf{A}) = 1$. 则存在可逆矩阵 \mathbf{P}, \mathbf{Q} , 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0 \cdots, 0) \mathbf{Q}.$$

记

$$\mathbf{a} \triangleq \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \triangleq (1, 0 \cdots, 0) \mathbf{Q},$$

注意到 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 是可逆矩阵, 其中不可能有全为零的行或列, 从而 \mathbf{a}, \mathbf{b}^T 即是满足条件的非零向量.

19. 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 证明

(1) 方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_m$ 有解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) = m$;

(2) 方程 $\mathbf{YA} = \mathbf{E}_n$ 有解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) = n$.

证明: (1) 由教材 P.78 定理 7, 方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_m$ 有解的充分必要条件是

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{E}_m).$$

\mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 则

$$R(\mathbf{A}) \leq m.$$

而由矩阵秩的性质 5,

$$m = R(\mathbf{E}_m) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{E}_m) = R(\mathbf{A}).$$

所以, $R(\mathbf{A}) = m$.

(2) 方程 $\mathbf{YA} = \mathbf{E}_n$ 两边作转置, 得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y}^T = \mathbf{E}_n.$$

此时 \mathbf{A}^T 为 $n \times m$ 矩阵, 由 (1) 的证明知 $\mathbf{A}^T \mathbf{Y}^T = \mathbf{E}_n$ 有解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}^T) = n$. 从而原命题得证.

20. 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 若 $\mathbf{AX} = \mathbf{AY}$, 且 $R(\mathbf{A}) = n$, 则 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

证明: 由 $\mathbf{AX} = \mathbf{AY}$, 得

$$\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{0}.$$

又 $R(\mathbf{A}) = n$, 由教材 P.78 定理 9, 则矩阵方程 $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$ 只有零解, 即

$$\mathbf{X} - \mathbf{Y} \equiv \mathbf{0}.$$

得证

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

第四章 向量组的线性相关性

1. 设 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 及 $3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

解:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \\ 3 \times 1 + 2 \times 1 - 4 \\ 3 \times 0 + 2 \times 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}) = 5(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a})$, 求 \mathbf{a} , 其中

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解: 由 $3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}) = 5(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a})$ 得

$$\mathbf{a} = \frac{1}{6}(3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. 已知向量组

$$A: \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B: \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明: 要证 B 组能由 A 组线性表示, 由 P.85 定理 2, 即要证矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 的秩等于矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ 的秩. 由

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - 3r_2]{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 7 & -9 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_3]{r_1 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 20 & 5 & 15 & 25 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

可见, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 3$, 因此, B 组能由 A 组线性表示.

又

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_3]{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 - r_3}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(B) = 2$. 而 $R(A) = 3$, 所以 A 组不能由 B 组线性表示. (因为若 A 组能由 B 组线性表示, 则 $R(A) \leq R(B)$. 见教材 P.86 定理 3.)

4. 已知向量组

$$A: \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad B: \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

证明 A 组与 B 组等价.

证明: 方法与教材 P.86 例 2 相同. 下证 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

所以 $R(A) = R(A, B) = 2$. 又由上述初等变换知

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(B) = 2$. 得到 $R(A) = R(B) = R(A, B)$. 即证 A 组与 B 组等价.

另证. 易见

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_3 = -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2,$$

及

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2), \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1).$$

知 A 组与 B 组等价.

5. 已知 $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2, R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$, 证明

- (1) \mathbf{a}_1 能由 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示;
- (2) \mathbf{a}_4 不能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示.

证明: (此题与 P.90 例 7 重复了.)

(1) 由 $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$, 知 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关. 从而向量组 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关 (整体无关则部分也无关. 见 P.90 定理 5(1)).

又 $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2 < 3$, 所以向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性相关. 由 P.90 定理 5(3) 知 \mathbf{a}_1 能由 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示.

(2) 假设 \mathbf{a}_4 能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示. 已证 \mathbf{a}_1 能由 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示, 所以 \mathbf{a}_4 能由 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示. 这与 $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$ 矛盾.

得证 \mathbf{a}_4 不能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

$$(1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(\mathbf{A}) = 2$, 所以该向量组是线性相关的.

或者: 由

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2+3r_1]{r_3+r_1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以该向量组是线性相关的.

或者: 由

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

知线性相关.

(2) 因为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times 2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

可见 $R(\mathbf{B}) = 3$, 所以该向量组是线性无关的.

7. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

解: 向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性相关的充要条件是 $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) < 3$, 即 $|\mathbf{A}| = 0$, 这里 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. 由

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-ar_3} \begin{vmatrix} 0 & a+1 & 1-a^2 \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2).$$

所以, $a = -1$ 或 $a = 2$ 时向量组线性相关.

8. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$ 线性相关, 求向量 \mathbf{b} 用 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性表示的表示式.

解: 设 $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$. 由 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$ 线性相关, 则存在不全为零的 x_1, x_2 使得

$$x_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}) + x_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

代入 $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$, 得

$$[x_1(k_1 + 1) + x_2k_1]\mathbf{a}_1 + [x_1k_2 + x_2(k_2 + 1)]\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} x_1(k_1 + 1) + x_2k_1 = 0, \\ x_1k_2 + x_2(k_2 + 1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

要使 x_1, x_2 不全为零, 则方程组 (4.2) 中系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} k_1 + 1 & k_1 \\ k_2 & k_2 + 1 \end{vmatrix} = k_1 + k_2 + 1 = 0.$$

所以

$$\mathbf{b} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 = k_1 \mathbf{a}_1 - (1 + k_1) \mathbf{a}_2,$$

或者记为

$$\mathbf{b} = c \mathbf{a}_1 - (1 + c) \mathbf{a}_2, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

9. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 也线性相关, 问 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ 是否一定线性相关? 试举例说明之.

解: 不一定. 比如取

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

得

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

此时 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 也线性相关, 但是 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ 是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 是线性相关的, 则 \mathbf{a}_1 可由 $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

成立, 则 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为 0 时, 等式

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

才能成立, 则 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性无关, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ 亦线性相关, 则有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

同时成立.

解: (1) 设

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \dots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

满足 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, 但 \mathbf{a}_1 不能由 $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

(2) 由有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

上式可化为

$$\lambda_1 (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + \dots + \lambda_m (\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

取

$$\mathbf{a}_1 = -\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \cdots, \quad \mathbf{a}_m = -\mathbf{b}_m = \mathbf{e}_m,$$

其中 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m$ 为单位向量, 则 (4.4) 式成立, 而 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m$ 线性无关, $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m$ 亦线性无关.

(3) 由仅当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 全为 0 时,

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0},$$

得 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m$ 线性无关.

取 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \cdots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$, 取 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m$ 为线性无关组, 满足以上条件. 但不能说 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ 是线性无关的.

(4) 取 $\mathbf{a}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (2, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (0, 3)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 4)^T$,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{4}\lambda_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

与题设矛盾.

11. 设 $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4 = \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1$, 证明向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ 线性相关.

证明: 因为

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4 = \mathbf{0},$$

所以 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ 线性相关.

12. 设 $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{b}_r = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_r$, 且向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

证明: 设

$$k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + k_r \mathbf{b}_r = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

则

$$(k_1 + \cdots + k_r) \mathbf{a}_1 + (k_2 + \cdots + k_r) \mathbf{a}_2 + \cdots + (k_i + \cdots + k_r) \mathbf{a}_i + \cdots + k_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

因向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ 线性无关, 故

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 + k_2 + \cdots + k_r &= 0, \\ k_2 + \cdots + k_r &= 0, \\ &\cdots \cdots \cdots \\ k_r &= 0. \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

通过回代可直接解得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

即, 要使 (4.5) 成立当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$. 所以 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

这是一个常见的题型, 使用的解法也是很典型的. 解法同教材 P.89 例 6 的证一.

证二. 因为

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

而矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 所以

$$R(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r) = r.$$

所以, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

证三. 由题设知向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 可由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 线性表示; 又 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_r = \mathbf{b}_r - \mathbf{b}_{r-1}$, 知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 可由向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性表示. 所以向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 与向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 等价. 又 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 线性无关, 知

$$R(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r) = r.$$

所以, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

证四. 记矩阵 $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r)$, 则

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_r) \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{\substack{c_r - c_{r-1} \\ \dots \\ c_2 - c_1}} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r),$$

从而,

$$R(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r) = r,$$

知 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{a}_1^T = (1, 2, 1, 3), \mathbf{a}_2^T = (4, -1, -5, -6), \mathbf{a}_3^T = (1, -3, -4, -7).$$

解: (1) 由

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 100 & 10 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 9r_1]{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 82 & 19 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 秩为 2, 一组最大线性无关组为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (或者 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$).

或者: 注意到 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_3 对应坐标成比例, 所以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ 线性相关. (这就已经告诉我们这个向量组的秩至多为 2 了.) 而 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_2 不成比例, 两者线性无关, 知向量组的秩为 2, 最大线性无关组为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (或者 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$).

(2) 由

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 4r_1]{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知向量组 $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T$ 的秩为 2, 最大线性无关组为 $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T$.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组, 并把其余列向量用最大无关组线性表示:

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_3 - r_2 \\ r_2 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以向量组的秩为 3, 且第 1、2、3 列构成一个最大无关组. 记这 4 列分别为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, 由

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 17r_3 \\ r_2 - 2r_3}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(r_1 - 31r_2) \div 25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathbf{a}_4 = \frac{8}{5}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$.

(2) 记这 4 列分别为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 \div (-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_1 - 2r_4 \\ (r_2 - r_4) \div 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 构成一个最大无关组, 且 $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

15. 设向量组

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求 a, b .

解: 依次记这 4 个向量为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, 并记此向量组为 A . 易见 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关 (因这两个向量对应坐标不成比例), 而已知向量组 A 的秩为 2, 所以 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 是向量组 A 的一个最大无关组. 则 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 可以由向量组 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性表示.

设

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $x = 0, y = 1$, 从而 $a = 2$.

用同样的方法可以计算得 $b = 5$.

16. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

证明: 向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示, 则

$$R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \leq R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n). \quad (\text{P.86 定理 3})$$

而

$$R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = n, \text{ 且 } R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \leq n,$$

所以

$$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = n.$$

得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

另证. 注意 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 当然是可以由单位坐标向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性表示的, 再加上已知条件, 知两向量组等价. 所以

$$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = n,$$

得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

17. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证明: (充分性) 设任一 n 维向量都可由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示, 则 n 维单位向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示. 由上一题得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

(必要性) 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关. 任给 n 维向量 \mathbf{b} , 则向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ 线性相关 ($n+1$ 个 n 维向量是线性相关的).

由 P.90 定理 5(3), 则向量 \mathbf{b} 必能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示 (且表示式是惟一的).

必要性的另一个说法: 若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关, 注意到这是一组 n 维向量, 则它们是向量空间 \mathbb{R}^n 的一组基, 所以任一 n 维向量都可由它们线性表示.

18. 设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, 且 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, 证明存在某个向量 \mathbf{a}_k ($2 \leq k \leq m$), 使 \mathbf{a}_k 能由 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$ 线性表示.

证明: 假设不存在这样的 \mathbf{a}_k . 则 \mathbf{a}_2 不能由 \mathbf{a}_1 线性表示, 从而向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关.

\mathbf{a}_3 不能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性表示, 又向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关, 所以向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关.

依次类推, 可以得到向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性无关. 这与题设矛盾. 假设不成立. 得证.

19. 设向量组 $B: \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ 能由向量组 $A: \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表示为

$$(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)\mathbf{K},$$

其中 \mathbf{K} 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 \mathbf{K} 的秩 $R(\mathbf{K}) = r$.

证明: (必要性) 设 B 组线性无关.

记 $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ 则有

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{K}. \quad (4.8)$$

由秩的性质知

$$R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{A}\mathbf{K}) \leq R(\mathbf{K}). \quad (4.9)$$

而由 B 组线性无关知 $R(\mathbf{B}) = r$, 故 $R(\mathbf{K}) \geq r$.

又 \mathbf{K} 为 $r \times s$ 阶矩阵, 则 $R(\mathbf{K}) \leq \min\{r, s\} \leq r$.

综上知 $R(\mathbf{K}) = r$.

(充分性) 若 $R(\mathbf{K}) = r$. 令

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_r\mathbf{b}_r = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

下证方程 (4.10) 只有零解. 为方便记方程 (4.10) 为

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

代入 (4.8) 式则有

$$\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

由向量组 $A: \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关, 有 $R(\mathbf{A}) = r$. 所以方程 (4.12) 只有零解:

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

又 $R(K) = r$, 所以方程 (4.13) 只有零解:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

充分性的证明过程, 就是在本章习题 12 中提到的“典型解法”, 这里只是改用矩阵的方式在说问题. 或者说, 表达方式同教材 P.89 例 6 的证二.

20. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

证明: 由题设知向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示. 下面只需证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示即可.

由题设得

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = (n-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

所以

$$(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

得

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) - \beta_1, \\ \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) - \beta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) - \beta_n. \end{cases}$$

得证向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示.

综上, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

另一个思路: 先说明系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

再得两向量组等价.

21. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 \boldsymbol{x} 满足 $A^3\boldsymbol{x} = 3A\boldsymbol{x} - A^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,

(1) 记 $P = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})$, 求 3 阶矩阵 B , 使 $AP = PB$; (2) 求 $|A|$.

解: (1) 由 $P = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})$, 有

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) \\ &= (A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} && \text{(由 } A^3\boldsymbol{x} = 3A\boldsymbol{x} - A^2\boldsymbol{x} \text{)} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到矩阵 P 是 3 阶方阵, 又向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 所以矩阵 P 可逆. 得

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $A = PBP^{-1}$, 两边取行列式得,

$$|A| = |B| = 0.$$

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

(3) $nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$.

解: (1)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 8]{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4, \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 或者写为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 3r_1]{r_3 - r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div 19]{r_1 \div 2 + \frac{3}{38}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{19}x_3 + \frac{1}{19}x_4, \\ x_2 = -\frac{14}{19}x_3 + \frac{7}{19}x_4. \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 或者写为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$.

(3) 原方程即为

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}.$$

或者

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-1}, \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}. \end{cases}$$

所以基础解系为

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

23. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 B , 使 $AB = O$, 且

$$R(B) = 2.$$

解: 由于 $R(B) = 2$, 所以可设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. 则由

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

解此非齐次线性方程组可得惟一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

故所求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 11 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

此题中满足条件的矩阵 B 显然不止一个. 比如在

$$AB = O$$

两边同时右乘某个初等矩阵, 则等式右边的 O 不变, 而矩阵 B 被进行列变换而发生了改变.

这也是为什么把 B 设为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

而不需要设为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 \end{pmatrix}$$

的原因.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

解: 显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

即

$$\begin{cases} x_1 = 3k_2, \\ x_2 = k_1 + 2k_2, \\ x_3 = 2k_1 + k_2, \\ x_4 = 3k_1. \end{cases}$$

消去 k_1, k_2 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解: (1) 因为

$$I \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

所以 I 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$II \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases}$$

所以 II 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 联立方程组 I 和 II 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

得方程组 I 与 II 的公共解为

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

26. 设 n 阶矩阵 \boldsymbol{A} 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, \boldsymbol{E} 为 n 阶单位矩阵, 证

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n.$$

提示: 利用矩阵性质 6 和 8.

证明: 由 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 得 $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{O}$, 根据矩阵秩的性质 8(P.71), 知

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \leq n.$$

又由矩阵秩的性质 6(P.71), 有

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \geq R(\mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{A}) = R(\mathbf{E}) = n.$$

所以 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = n$.

注意其中提到的 $R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$. 一般地, $R(-\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$, 或 $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$, k 为非零常数.

27. 设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵 ($n \geq 2$), \mathbf{A}^* 为 \mathbf{A} 的伴随矩阵, 证明

$$R(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(\mathbf{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } R(\mathbf{A}) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } R(\mathbf{A}) \leq n - 2. \end{cases}$$

解: (1) 若 $R(\mathbf{A}) = n$. 又 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 知矩阵 \mathbf{A} 可逆. 从而矩阵 \mathbf{A}^* 可逆, 得 $R(\mathbf{A}^*) = n$.

(2) 若 $R(\mathbf{A}) = n - 1$. 则矩阵 \mathbf{A} 至少存在一个 $n - 1$ 阶非零子式, 从而矩阵 \mathbf{A}^* 中至少有一个元素非零, 得

$$R(\mathbf{A}^*) \geq 1. \quad (4.14)$$

又由 $R(\mathbf{A}) = n - 1$ 知 $|\mathbf{A}| = 0$, 所以

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} = \mathbf{O}.$$

由矩阵性质 8 知

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}^*) \leq n.$$

代入 $R(\mathbf{A}) = n - 1$, 得

$$R(\mathbf{A}^*) \leq 1. \quad (4.15)$$

综合 (4.14) 式和 (4.15) 式得

$$R(\mathbf{A}^*) = 1.$$

(3) 若 $R(\mathbf{A}) \leq n - 2$. 则矩阵 \mathbf{A} 的所以 $n - 1$ 阶子式全为零, 这使得 $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$. 所以

$$R(\mathbf{A}^*) = 0.$$

28. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

解: (1)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div -2]{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -4 & 7 & -28 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_2]{r_3 \div 14} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解: 记该方程组为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. 由于矩阵 \boldsymbol{A} 的秩为 3, 方程组有 4 个未知量, $n - r = 4 - 3 = 1$, 故其对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系含有一个向量.

由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解, 知 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3$ 为对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, $(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3)$ 也是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 又 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系含有一个向量, 所以可以取

$$(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3) = 2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 基础解系. 故方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为:

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

30. 设有向量组 $A: \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 及向量 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, 问 α, β 为

何值时

- (1) 向量 \mathbf{b} 不能由向量组 A 线性表示;
 (2) 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式惟一;
 (3) 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解: (这个题目其实是重要题型“带参量的线性方程组”的另一种出现方式.)

设

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

即

$$\begin{cases} \alpha x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta, \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases} \quad (4.16)$$

往下讨论方程组 (4.16) 的解即可. 记矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, 由

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_2} \begin{vmatrix} \alpha + 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -(\alpha + 4),$$

所以 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 即 $\alpha \neq -4$ 时, 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式惟一.

当 $\alpha = -4$ 时,

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 5r_2]{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 + 2\beta \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & -1 - 5\beta \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{(r_3 - r_1) \div (-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right),$$

所以, 当 $\alpha = -4$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 方程组 (4.16) 无解, 向量 \mathbf{b} 不能由向量组 A 线性表示;

当 $\alpha = -4$ 且 $\beta = 0$ 时, 方程组 (4.16) 有解, 由

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

得方程组 (4.16) 的同解方程组及通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 - 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = -2c - 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

即, 当 $\alpha = -4$ 且 $\beta = 0$ 时, 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 其一般表示式为

$$\mathbf{b} = c\mathbf{a}_1 - (2c + 1)\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

31. 设

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ l_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3)$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性无关, 且向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关.

证明: 三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3) \quad (4.17)$$

有惟一解. 记方程组 (4.17) 为

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = -\mathbf{c}. \quad (4.18)$$

方程组 (4.18) 有惟一解的充要条件是

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}) = 2. \quad (4.19)$$

注意到 $R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}) = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, (因为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c})$ 与 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 是列等价的.) 所以 (4.19) 即为

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 2.$$

即向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性无关, 且向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关.

32. 设矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, 其中 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关, $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$. 向量 $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$, 求方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解.

解: 方法一. 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 为

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 + \mathbf{a}_4x_4 = \mathbf{b}.$$

代入 $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, 整理得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\mathbf{a}_2 + (-x_1 + x_3)\mathbf{a}_3 + (x_4 - 1)\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}.$$

又 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

方程组 (4.20) 等价于

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

得方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

方法二. 由题设知 $R(\mathbf{A}) = 3$, $n - r = 4 - 3 = 1$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中只包含一个向量. 由

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$

可以取 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $(1, -2, 1, 0)^T$.

再由

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

知 $(1, 1, 1, 1)^T$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个特解. 所以 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

方法三. 记矩阵 $\mathbf{P} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. 则

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{PB},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{P}\beta.$$

则方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 为

$$\mathbf{PBx} = \mathbf{P}\beta, \quad \text{即} \quad \mathbf{P}(\mathbf{Bx} - \beta) = \mathbf{0}.$$

注意 \mathbf{P} 是 4×3 矩阵, 且 $R(\mathbf{P}) = 3$, 则方程组 $\mathbf{Py} = \mathbf{0}$ 只有零解, 所以

$$\mathbf{Bx} - \beta \equiv \mathbf{0}.$$

解方程组 $\mathbf{Bx} = \beta$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

33. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个解, ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

- (1) $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;
- (2) $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

证明: (1) 假设 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关. 而由基础解系的定义知 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 是线性无关的, 则 η^* 可以由 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性表示, 从而 η^* 是齐次方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 这与 η^* 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解矛盾. 所以假设不成立. 即 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

(2) 易知向量组 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 与向量组 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 等价. 又由本题 (1) 的结论, $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 知

$$R(\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}) = R(\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}) = n - r + 1.$$

所以, $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

34. 设 η_1, \dots, η_s 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 s 个解, k_1, \dots, k_s 为实数, 满足 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$. 证明

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$$

也是它的解.

证明: 由于 η_1, \dots, η_s 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 s 个解. 故有 $A\eta_i = b, (i = 1, \dots, s)$. 而

$$\begin{aligned} & A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s) \\ &= k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \dots + k_sA\eta_s \\ &= b(k_1 + \dots + k_s) = b, \end{aligned}$$

即 $Ax = b, (x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s)$.

从而 $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$ 也是方程的解.

35. 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 $r, \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$ 是它的 $n - r + 1$ 个线性无关的解 (由题 33 知它确有 $n - r + 1$ 个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}, \quad (\text{其中 } k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1).$$

证明: 设 x 为 $Ax = b$ 的任一解. 已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关且均为 $Ax = b$ 的解. 取向量组

$$\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1, \quad (4.21)$$

下证该向量组是 $Ax = b$ 的基础解系.

由

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}) \xrightarrow[j=2, \dots, n-r+1]{c_j - c_1} (\eta_1, \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1),$$

已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关, 得向量组 $\eta_1, \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$ 线性无关, 所以向量组 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$ 线性无关, 是 $Ax = b$ 的一个基础解系.

则 $Ax = b$ 的任意一个解 x 可以表示为

$$x = k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_3(\eta_3 - \eta_1) + \dots + k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1} - \eta_1) + \eta_1,$$

整理得

$$x = (1 - k_2 - k_3 - \dots - k_{n-r+1})\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},$$

记 $k_1 = 1 - k_2 - k_3 - \dots - k_{n-r+1}$, 则 $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{n-r+1} = 1$, 而且

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}.$$

36. 设

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\},$$

$$V_2 = \{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \}.$$

问 V_1, V_2 是不是向量空间? 为什么?

证明: 集合 V 成为向量空间只需满足条件:

若 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$;

若 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$.

(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in V$, 设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, & \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= 0, \\ \boldsymbol{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T, & \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n &= 0. \end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)^T$, 且

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \\ &= (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1. \quad (4.22)$$

对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n).$$

因为

$$\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \dots + \lambda\alpha_n = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

故

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V_1. \quad (4.23)$$

综合 (4.22) 和 (4.23) 式, 得证 V_1 是向量空间.

(2) V_2 不是向量空间, 因为:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \\ &= (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_2.$$

37. 试证: 由 $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1)^T, \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 \mathbb{R}^3 .

证明: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, 因为

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

知 $R(\boldsymbol{A}) = 3$, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关.

由于 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 均为三维, 且秩为 3, 所以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 为此三维空间的一组基, 故由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 所生成的向量空间就是 \mathbb{R}^3 .

38. 由 $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_1 , 由 $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 3, 3)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_2 , 试证 $L_1 = L_2$.

证明: 容易发现向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 与向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 等价. 因为

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2), & \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2); \\ \mathbf{b}_1 &= -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2, & \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2.\end{aligned}$$

又由教材 P.105 例 23 知“等价的向量组生成的向量空间相同”, 所以 $L_1 = L_2$.

39. 验证 $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (2, 1, 3)^T, \mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一个基, 并把 $\mathbf{v}_1 = (5, 0, 7)^T, \mathbf{v}_2 = (-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解: 记矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. 由于

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

即矩阵 \mathbf{A} 的秩为 3, 故 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 为 \mathbb{R}^3 的一个基.

设

$$\mathbf{v}_1 = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3.$$

要求得 k_1, k_2, k_3 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 即要求线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ 的解. 由

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_2-4r_3 \\ r_1-3r_3}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \div 3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right).\end{aligned}$$

求得方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ 的解, 即

$$\begin{cases} k_1 = 2, \\ k_2 = 3, \\ k_3 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -3, \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

故

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3.$$

40. 已知 \mathbb{R}^3 的两个基为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求由基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 到基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 的过渡矩阵.

解: 由过渡矩阵的定义知, 从基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 到基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

这里 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. 因为

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3 + r_1]{r_3 \div 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第五章 相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

$$(1) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(2) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解: (1) 由施密特正交化方法, 得

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得:

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) 由施密特正交化方法得

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交矩阵? 并说明理由.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解: (1) 第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设 x 为 n 维列向量, $x^T x = 1$, 令 $H = E - 2xx^T$, 证明 H 是对称的正交阵.

证明: 注意到矩阵的转置运算满足 $(A+B)^T = A^T + B^T$, 有

$$\begin{aligned} H^T &= (E - 2xx^T)^T \\ &= E^T - 2(xx^T)^T \\ &= E - 2(x^T)^T(x^T) \\ &= E - 2xx^T \\ &= H. \end{aligned}$$

所以 H 是对称的. 又

$$\begin{aligned} H^T H &= (E - 2xx^T)(E - 2xx^T) \\ &= E - 2xx^T - 2xx^T + 4xx^T xx^T \\ &= E. \end{aligned} \quad (x^T x = 1)$$

则 H 是正交阵.

综上得证 H 是对称的正交阵.

4. 设 A 与 B 都是正交阵, 证明 AB 也是正交阵.

证明: 因为 A, B 是正交阵, 故 $A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T$.

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^{-1} A^{-1} AB = E.$$

故 AB 也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - (\lambda+2)c_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -5\lambda-7 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 时, 解方程 $(A + E)x = 0$, 由

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 5r_3]{r_1 + 3r_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 所以 $k\mathbf{p}$ ($k \neq 0$) 是对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的全部特征值向量.

(2) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9),$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1 - r_2]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故 $k_1\mathbf{p}_1$ ($k_1 \neq 0$) 是对应于 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_2 = -1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故 $k_2\mathbf{p}_2$ ($k_2 \neq 0$) 是对应于 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - 9\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} - 9\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 故 $k_3\mathbf{p}_3$ ($k_3 \neq 0$) 是对应于 $\lambda_3 = 9$ 的全部特征值向量.

(3) 由

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{展开 } r_1}{=} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2(\lambda - 1) - 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2 \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2, \end{aligned}$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为

$$k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0).$$

当 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 的全部特征向量为

$$k_3\mathbf{p}_3 + k_4\mathbf{p}_4 \quad (k_3, k_4 \text{ 不同时为 } 0).$$

6. 设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, 证明 \mathbf{A}^T 与 \mathbf{A} 的特征值相同.

证明: 证明二者有相同的特征方程 (或特征多项式) 即可. 由性质 $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$, 知

$$|\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}| = |(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^T| = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|.$$

得证 \mathbf{A}^T 与 \mathbf{A} 的特征值相同.

7. 设 n 阶矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 满足 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) < n$, 证明 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

证明: 由 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) < n$, 有 $R(\mathbf{A}) < n$, 而

$$R(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{A} - 0\mathbf{E}| = 0 \Leftrightarrow 0 \text{ 是 } \mathbf{A} \text{ 的特征值.}$$

同理, 0 也是 \mathbf{B} 的特征值. 所以 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有公共的特征值 0.

下证 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有对应于 $\lambda = 0$ 的公共特征向量.

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有对应于 $\lambda = 0$ 的公共特征向量

\Leftrightarrow 存在非零向量 \boldsymbol{p} 同时满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$

\Leftrightarrow 方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$ 有非零解

\Leftrightarrow 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

而

$$R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leq R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) < n.$$

综上知 \boldsymbol{A} 与 \boldsymbol{B} 有公共的特征向量.

8. 设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 证明 \boldsymbol{A} 的特征值只能取 1 或 2.

证明: 设 λ 是 \boldsymbol{A} 的特征值, 则 $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ 是 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 的特征值¹. 则存在非零向量 \boldsymbol{p} 使

$$(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p}.$$

又由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 代入上式得

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}.$$

而特征向量 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 所以只能有

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得 $\lambda = 1$ 或 2 .

得证 \boldsymbol{A} 的特征值只能取 1 或 2.

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0.$$

所以

$$|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0,$$

则 1 或 2 是矩阵 \boldsymbol{A} 的特征值.

但是这样只是说明了 1 或 2 是矩阵 \boldsymbol{A} 的特征值, 矩阵 \boldsymbol{A} 是否还有别的特征值没有得到证明, 这就不能下结论说“ \boldsymbol{A} 的特征值只能取 1 或 2”.

9. 设 \boldsymbol{A} 为正交阵, 且 $|\boldsymbol{A}| = -1$, 证明 $\lambda = -1$ 是 \boldsymbol{A} 的特征值.

证明: 即需证明 $\lambda = -1$ 满足特征方程 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$, 即 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = 0$. 因为

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| &= |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| && (\boldsymbol{A} \text{ 为正交阵}) \\ &= |\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{A}| \\ &= -|\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{E}| && (|\boldsymbol{A}| = -1) \\ &= -|(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^T| \\ &= -|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}|, \end{aligned}$$

所以 $2|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = 0$, 即 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = 0$. 得证 $\lambda = -1$ 是 \boldsymbol{A} 的特征值.

10. 设 $\lambda \neq 0$ 是 m 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{m \times n}\boldsymbol{B}_{n \times m}$ 的特征值, 证明 λ 也是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的特征值.

¹见 P.122 例 8 的推广结论.

证明: 设 p 是矩阵 $A_{m \times n} B_{n \times m}$ 的对应于 λ 的特征向量, 则

$$(AB)p = \lambda p. \quad (5.1)$$

上式两边同时左乘 B 得 $B(AB)p = B\lambda p$, 即

$$(BA)(Bp) = \lambda(Bp).$$

下面证明 Bp 是非零的. 因为, 假如 $Bp = 0$, 则 (5.1) 式中左边 $(AB)p = A(Bp) = 0$; 但是 $\lambda \neq 0$, 且特征向量 p 是非零向量, 从而 $\lambda p \neq 0$. 假设不成立.

得证 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

注意: 特征向量是非零的.

11. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 求 $|A^3 - 5A^2 + 7A|$.

解: (模仿 P.122 例 9 解题.) 设 λ 是矩阵 A 的特征值, 记 $\varphi(A) = A^3 - 5A^2 + 7A$, 则 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值. 又

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = 3,$$

知 $\varphi(A)$ 的特征值为 3, 2, 3, 所以

$$|A^3 - 5A^2 + 7A| = 3 \times 2 \times 3 = 18.$$

12. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, -3, 求 $|A^* + 3A + 2E|$.

解: 因 $A^* = |A|A^{-1}$, 知 A 可逆. 若 λ 是矩阵 A 的特征值, 则 $\varphi(A) = A^* + 3A + 2E$ 的特征值为 $\varphi(\lambda) = \frac{|A|}{\lambda} + 3\lambda + 2$.

所以 $A^* + 3A + 2E$ 的全部特征值为

$$\varphi(1) = -1, \quad \varphi(2) = 5, \quad \varphi(-3) = -5,$$

于是

$$|A^* + 3A + 2E| = (-1) \cdot 5 \cdot (-5) = 25.$$

13. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 A 可逆, 证明 AB 与 BA 相似.

证明: 由 A 可逆知

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = BA,$$

则 AB 与 BA 相似.

14. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可相似对角化, 求 x .

解: 解题依据: 定理 4 (P.125), “ n 阶矩阵 A 能对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量”.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-6), \end{aligned}$$

得 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

要使 3 阶矩阵 A 能对角化, 则需 A 有 3 个线性无关的特征向量.

单根特征值对应的线性无关的特征向量有且仅有 1 个, 所以, 要使矩阵 \mathbf{A} 能对角化, 需重根 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应有 2 个线性无关的特征向量, 即方程组 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有 2 个线性无关的解. 由 P.98 定理 7, 则要求

$$n - R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2, \quad \text{即} \quad R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1.$$

由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$x = 3.$$

因此, 当 $x = 3$ 时, 矩阵 \mathbf{A} 能对角化.

15. 已知 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 a, b 及特征向量 \mathbf{p} 所对应的特征值;

(2) 问 \mathbf{A} 能不能相似对角化? 并说明理由.

解: (1) 设特征向量 \mathbf{p} 所对应的特征值为 λ , 则 $\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

得

$$\lambda = -1, \quad a = -3, \quad b = 0.$$

(2) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3,$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

要使 3 阶矩阵 \mathbf{A} 能够对角化, 需使重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 对应 3 个线性无关的特征向量, 即要求 3 元齐次方程 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的线性无关解的个数为 $n - r = 3 - R(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 3$.

而这里 $\mathbf{A} + \mathbf{E} \neq \mathbf{O}$, 即 $R(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \geq 1$, $n - r = 3 - R(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \leq 2$, 所以, 方程 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的线性无关解的个数不可能为 3. 得证矩阵 \mathbf{A} 不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称矩阵化为对角矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 $|\mathbf{A}|$ 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

当 $\lambda_1 = -2$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

得正交阵 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 \mathbf{A} 可对角化为

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5 - \lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10),$$

得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即基础解系为 $\xi_1 = (-2, 1, 0)^T, \xi_2 = (2, 0, 1)^T$. 将 ξ_1, ξ_2 正交化, 取 $\eta_1 = \xi_1$,

$$\eta_2 = \xi_2 - \frac{[\eta_1, \xi_2]}{[\eta_1, \eta_1]} \eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化得

$$p_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = 10$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

单位化得 $p_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

得正交阵

$$(p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

从而矩阵 A 可对角化为

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

17. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y ; 并求一个正交阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

解: 方阵 A 与对角阵 Λ 相似, 则 $5, -4, y$ 是矩阵 A 的特征值. 从而 $|A - 5E| = 0, |A + 4E| = 0$. 对 $|A + 4E| = 0$, 因

$$|A + 4E| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -4 & x+4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9(x-4),$$

得 $x = 4$. 下求 y .

由性质 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 5 \times (-4) \times y$, 又

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_3} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -100,$$

得 $y = 5$.

下求正交矩阵 P .

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(A - 5E)x = 0$. 由

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一组正交的基础解系

$$\xi_1 = (1, -2, 0)^T, \quad \xi_2 = (2, 1, -\frac{5}{2})^T.$$

单位化得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)^T, \quad p_2 = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{3})^T.$$

当 $\lambda_3 = -4$ 时, 解方程 $(A + 4E)x = 0$. 由

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\xi_3 = (2, 1, 2)^T$, 单位化得

$$p_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T.$$

令

$$P = (p_1, p_3, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$

则 P 为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$P^{-1}AP = \text{diag}(5, -4, 5).$$

注意 P 中特征向量 p_1, p_3, p_2 的排列顺序, 要与 Λ 中的对角元 $5, -4, 5$ 相对应.

满足条件的正交矩阵不是唯一的. 比如解方程 $(A - 5E)x = 0$ 时, 构造一组正交的基础解系为

$$\xi_1 = (1, 0, -1)^T, \quad \xi_2 = (1, -4, 1)^T.$$

单位化得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \quad p_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, 1)^T.$$

最后可得满足条件的正交矩阵为

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

另解(求 x, y). 方阵 A 与对角阵 Λ 相似, 则 $5, -4, y$ 是矩阵 A 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ 和 $|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 得

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\mathbf{A}|. \end{cases} \quad (5.2)$$

又

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_3} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -4 & x & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15x - 40,$$

代入 (5.2) 式得

$$\begin{cases} 1 + y = 2 + x, \\ -20y = -15x - 40. \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

18. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$; 对应的特征向量依次为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求 A .

解: 记 $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 则 $AP = P\Lambda$, 所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

其中

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 A .

解: 设 λ_3 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_3 = (x, y, z)^T$. 注意到 A 为对称阵, 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 知 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ 两两正交. 则

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

由系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

知方程组 (5.3) 的通解为

$$(x, y, z)^T = k(-2, 2, -1)^T.$$

可取

$$\mathbf{p}_3 = (-2, 2, -1)^T,$$

因 A 对称, 必有正交阵 Q , 使

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(1, -1, 0).$$

前面已经求得 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ 正交, 再单位化, 即得

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A = Q \text{diag}(1, -1, 0) Q^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$, 求 A .

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. 由定理 6, $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ 与 \mathbf{p}_1 正交. 设 $(x, y, z)^T$ 与 \mathbf{p}_1 正交, 则

$$x + y + z = 0.$$

解方程得基础解系为

$$(-1, 0, 1)^T, (-1, 1, 0)^T.$$

所以可取

$$\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 1)^T, \mathbf{p}_3 = (-1, 1, 0)^T.$$

2° 下求矩阵 A . 由

$$A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = (6\mathbf{p}_1, 3\mathbf{p}_2, 3\mathbf{p}_3),$$

得

$$A = (6\mathbf{p}_1, 3\mathbf{p}_2, 3\mathbf{p}_3)(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 6 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1+c_2 \\ c_3-c_2}]{\quad} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(c_1-c_3)\div 3 \\ c_2\times(-1)}]{\quad} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

得

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \operatorname{diag}(6, 3, 3) (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $a_1 \neq 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$,

(1) 证明 $\lambda = 0$ 是 \mathbf{A} 的 $n-1$ 重特征值;

(2) 求 \mathbf{A} 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解: (1) 注意到 \mathbf{A} 为对称阵, 故 \mathbf{A} 与对角阵 $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 \mathbf{A} 的全部特征值.

由习题三 18 题, 知 $R(\mathbf{A}) = 1$, 从而 $R(\mathbf{\Lambda}) = 1$, 于是 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元只有一个非零, 即 $\lambda = 0$ 是 \mathbf{A} 的 $n-1$ 重特征值.

(2) 因 $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ 的对角线元素之和为 $\sum_{i=1}^n a_i^2$; 又由特征值性质: \mathbf{A} 的 n 个特征值之和为 $\sum_{i=1}^n a_i^2$, 已证

$\lambda = 0$ 是 \mathbf{A} 的 $n-1$ 重特征值, 所以剩下的那个特征值只能是 $\sum_{i=1}^n a_i^2$.

已知 $a_1 \neq 0$, 所以 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$, 得证 $\sum_{i=1}^n a_i^2$ 是 \mathbf{A} 的非零特征值 (且是惟一的).

下求 \mathbf{A} 的特征向量.

(a) 当 $\lambda = 0$ ($n-1$ 重) 时, 求解方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \div a_1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{i=2,3,\dots} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\lambda = 0$ ($n-1$ 重) 对应的 $n-1$ 个线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

(b) 当 $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ 时, 由 $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$, 有

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a}) = \mathbf{a} \sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \mathbf{a},$$

可见 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 是 $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ 对应的特征向量.

综上, 得到 \mathbf{A} 的 n 个线性无关的特征向量:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

22. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A}^{100} .

解: (一般的解法) 先把矩阵 \mathbf{A} 对角化. 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 5),$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)^T$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 5$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_2 = (2, 1, 2)^T$.

当 $\lambda_3 = -5$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = -5$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_3 = (1, -2, 1)^T$.

记 $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(1, 5, -5)$, 由 $\mathbf{A}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)\text{diag}(1, 5, -5)$, 则 $\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda P}^{-1}$, 所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda P}^{-1}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{100} &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{100}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 5^{100} & 5^{100} \\ 0 & 5^{100} & -2 \cdot 5^{100} \\ 0 & 2 \cdot 5^{100} & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100} - 1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

另解. (一个碰巧的解法) 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & (a+c)d \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

若 $d = c - a$, 则

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2 - a^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

.....

$$\begin{pmatrix} a^n & 0 & c^n - a^n \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 & c^{n-1} - a^{n-1} \\ 0 & b^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25^{50} - 1 \\ 0 & 25^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 25^{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100} - 1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

注 这个题型很重要. 解此类题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 \mathbf{A}^5 .

解法一 注意到

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1),$$

则

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1).$$

而

$$(1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

所以

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-3)^4 \cdot (1, -1, -1) = (-3)^4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) = 81\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

解法二 由

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -3\mathbf{A},$$

可知

$$\mathbf{A}^5 = (-3)^4 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

再看一个题目.

已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A}^{2006} .

解: 注意到 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{2006} &= \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)}_{2006 \text{ 个 } \mathbf{A}} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underbrace{(1, 1, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)}_{2005 \text{ 个 } (a+b+c) \text{ 相乘}} \\ &= (a+b+c)^{2005} \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23. 在某国, 每年有比例为 p 的农村居民移居城镇, 有比例为 q 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n ($x_n + y_n = 1$).

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

解: 由题设得

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-p)x_n + qy_n, \\ y_{n+1} = px_n + (1-q)y_n. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(2) 由递推关系式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

代入 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

下求 \mathbf{A}^n . 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-(1-p-q)),$$

得矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1-p-q$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 1$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 1-p-q$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - (1-p-q)\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} - (1-p-q)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 1-p-q$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, 则 \mathbf{P} 可逆, 且 $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P} \operatorname{diag}(1, 1-p-q)$. 所以 $\mathbf{A} = \mathbf{P} \operatorname{diag}(1, 1-p-q) \mathbf{P}^{-1}$, 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q - (q-p)(1-p-q)^n \\ 2p + (q-p)(1-p-q)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

24. (1) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{10} - 5\mathbf{A}^9$;

(2) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{10} - 6\mathbf{A}^9 + 5\mathbf{A}^8$.

解: (1) \mathbf{A} 的特征多项式为

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = (\lambda-5)(\lambda-1),$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$.

$\lambda_1 = 5$ 时, 由

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -1)^T$.

$\lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 1)^T$.

所以 $A(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2) \text{diag}(5, 1)$, 记 $P = (\xi_1, \xi_2)$, $\Lambda = \text{diag}(5, 1)$, 则 $A = P\Lambda P^{-1}$. 所以

$$\begin{aligned} A^{10} - 5A^9 &= P\Lambda^{10}P^{-1} - 5P\Lambda^9P^{-1} = P \left(\begin{pmatrix} 5^{10} & \\ & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5^{10} & \\ & 5 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意这类题型只需要把矩阵进行一般的对角化就可以了, 不一定非得求正交矩阵使之对角化. 考虑到正交矩阵的逆矩阵易求, 也可以构造正交矩阵解题. 如下面的解法.

(2) 矩阵 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{c_1+c_2+c_3}{5-\lambda}} (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{r_3-r_1}{r_2-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

$\lambda_1 = 5$ 时, 由

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1+r_2]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$;

$\lambda_2 = 1$ 时, 由

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\xi_2 = (1, -1, 0)^T$;

$\lambda_3 = -1$ 时, 由

$$A + E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\xi_3 = (1, 1, -2)^T$.

这里 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是对称矩阵的不同特征值对应的特征向量, 它们已经正交, 再分别单位化, 得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T.$$

取正交矩阵

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

由 $A(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) \text{diag}(5, 1, -1)$, 记 $\Lambda = \text{diag}(5, 1, -1)$, 则 $A = P\Lambda P^{-1}$, $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$. 因此

$$A^{10} - 6A^9 + 5A^8 = P(\Lambda^{10} - 6\Lambda^9 + 5\Lambda^8)P^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -4\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz;$

(2) $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz;$

(3) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4.$

解: (1)
$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(2)
$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(3)
$$f = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x};$ (2) $f(x) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

解: 对称地调整 a_{ij} 与 a_{ji} 的值, 使两者的和不变, 且 $a_{ij} = a_{ji}$ 即可:

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3;$

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$

解: (1) 二次型 f 的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$ 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda),$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1.$

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 取 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 取 $p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 取 $p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有

$$f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2.$$

(2) 二次型 f 的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{c_1+c_2+c_3+c_4}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{r_1 - \lambda r_3}{r_2 - 2r_3} (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & -1 - \lambda & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ 0 & -1 - \lambda & -2 + 2\lambda \\ -1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2,$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 由

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_2 \div 2]{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 - 2r_4]{(r_3 + r_4) \div 2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

取特征向量为 $\xi_1 = (1, -1, -1, 1)^T$, 单位化得 $p_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$,

当 $\lambda_2 = 3$ 时, 由

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 3\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_2 \div (-2)]{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 + r_4]{r_1 + 3r_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

可得特征向量 $\xi_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, 单位化得 $p_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

当 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时, 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得两个正交的特征向量: $\xi_3 = (1, 0, 1, 0)^T, \xi_4 = (0, 1, 0, 1)^T$, 单位化得 $p_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, p_4 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

且有

$$f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz = 1$$

化成标准方程.

解: 把等式左边的二次型化为标准型即可. 记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & 10-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(11-\lambda),$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 11$. 下求它们对应的特征向量.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 由

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量为 $\xi_1 = (0, 1, 1)^T$. 单位化得 $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T$.

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 由

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 2$ 对应的特征向量为 $\xi_2 = (4, -1, 1)^T$. 单位化得 $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, -1, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 11$ 时, 由

$$\mathbf{A} - 11\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 0 & -11 & -11 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+5r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = 11$ 对应的特征向量为 $\xi_3 = (1, 2, -2)^T$. 单位化得 $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$.

从而得正交矩阵

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

由正交变换 $(x, y, z)^T = \mathbf{P}(u, v, w)^T$, 二次型 $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz$ 化为标准型

$$2v^2 + 11w^2.$$

即二次曲面的标准方程为

$$2v^2 + 11w^2 = 1.$$

29. 证明: 二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 时的最大值为矩阵 \mathbf{A} 的最大特征值.

证明: 取正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 则

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{P} \mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{P} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

又正交变换保持向量的长度不变, 即

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2,$$

所以, 当 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 时, 有 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = 1$.

记 $\lambda_i = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 则

$$f = (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2) \leq (\lambda_i y_1^2 + \lambda_i y_2^2 + \dots + \lambda_i y_n^2) = \lambda_i (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = \lambda_i.$$

而且, 当 $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ 时, $f = \lambda_i$. 故得证

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} f = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

30. 用配方法化下列二次型成规范型, 并写出所用变换的矩阵:

$$(1) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$$

$$(2) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$(3) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3;$$

解: (1)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}(x_2 + x_3), \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 3y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

把 f 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases}$$

把 f 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$f = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 \\
 &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + 2x_3^2,
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 + x_3, \\ y_3 = \sqrt{2}x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + \sqrt{2}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \end{cases}$$

把 f 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型, 求 a .

解: 该二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

由正定的充要条件, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

即

$$\begin{cases} 1 - a^2 > 0, \\ -a(5a + 4) > 0. \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5} < a < 0.$$

32. 判定下列二次型的正定性:

(1) $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

(2) $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4$.

解: (1) f 的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

由

$$a_{11} = -2 < 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -38 < 0,$$

根据定理 11 知 f 为负定.

(2) f 的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix},$$

由

$$a_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0, \quad |\mathbf{A}| = 24 > 0,$$

根据定理 11 知 f 为正定.

33. 证明对称阵 \mathbf{A} 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 \mathbf{U} , 使 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$, 即 \mathbf{A} 与单位阵 \mathbf{E} 合同.

证明: (充分性) 若存在可逆矩阵 \mathbf{U} , 使 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$, 任取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 则

$$\mathbf{U}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

(如果 $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由 \mathbf{U} 可逆, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 矛盾.)

对这个任取的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{x})^T (\mathbf{U}\mathbf{x}) = [\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{U}\mathbf{x}] = \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|^2 > 0.$$

从而矩阵 \mathbf{A} 为正定的.

(必要性) 设对称阵 \mathbf{A} 为正定的. 因 \mathbf{A} 是对称阵, 则存在正交阵 \mathbf{Q} , 使 \mathbf{A} 对角化, 即

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 \mathbf{A} 的特征值. 而 \mathbf{A} 为正定的, 所以 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 记对角阵

$$\mathbf{A}_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}),$$

则

$$\mathbf{A}_1^2 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = \mathbf{\Lambda}.$$

从而

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q} \mathbf{A}_1) (\mathbf{Q} \mathbf{A}_1)^T,$$

记 $\mathbf{U} = (\mathbf{Q} \mathbf{A}_1)^T$, 则 \mathbf{U} 可逆, 而且得到 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$.