线性代数 (同济五版) 习题参考答案

黄正华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072

Wuhan University

本文档使用 LaTeX 软件排版. 秉承自由软件之精神, 请您确认该文档的获得, 无需支付任何形式的费用或虚拟货币.

本文的更新下载地址: http://aff.whu.edu.cn/huangzh/.

目　录

第一章　行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解: (1)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \\
=&2\times(-4)\times 3+0\times(-1)\times(-1)+1\times 1\times 8-0\times 1\times 3-2\times(-1)\times 8-1\times(-4)\times(-1) \\
=&-24+8+16-4 \\
=&-4.
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2=(a-b)(b-c)(c-a).$$

(4)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} &= x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-y^3-(x+y)^3-x^3 \\
&= 3xy(x+y)-y^3-3x^2y-3y^2x-x^3-y^3-x^3 \\
&= -2(x^3+y^3).
\end{aligned}$$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;　　(2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1;　　(4) 2 4 1 3;

(5) $1\ 3 \cdots (2n-1)\ 2\ 4 \cdots (2n)$;

(6) $1\ 3 \cdots (2n-1)\ (2n)\ (2n-2) \cdots 2$.

解

(1) 逆序数为 0.

(2) 逆序数为 4: 4 1, 4 3, 4 2, 3 2.

(3) 逆序数为 5: 3 2, 3 1, 4 2, 4 1, 2 1.

(4) 逆序数为 3: 2 1, 4 1, 4 3.

(5) 逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$:

$3\ 2$ .... 1 个
$5\ 2,\ 5\ 4$ .... 2 个
$7\ 2,\ 7\ 4,\ 7\ 6$ .... 3 个
....
$(2n-1)\ \ 2,\ (2n-1)\ \ 4,\ (2n-1)\ \ 6,\ \ldots,\ (2n-1)\ (2n-2)$ .... $(n-1)$ 个

(6) 逆序数为 $n(n-1)$:

$3\ 2$ .... 1 个
$5\ 2,\ 5\ 4$ .... 2 个
$7\ 2,\ 7\ 4,\ 7\ 6$ .... 3 个
....
$(2n-1)\ \ 2,\ (2n-1)\ \ 4,\ (2n-1)\ \ 6,\ \ldots,\ (2n-1)\ (2n-2)$ .... $(n-1)$ 个
$4\ 2$ .... 1 个
$6\ 2,\ 6\ 4$ .... 2 个
....
$(2n)\ 2,\ (2n)\ 4,\ (2n)\ 6,\ \ldots,\ (2n)\ (2n-2)$ .... $(n-1)$ 个

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解: 由定义知, 四阶行列式的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4},$$

其中 t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数.

由于 $p_1=1,\ p_2=3$ 已固定, $p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 13□□, 即 1324 或 1342. 对应的逆序数 t 分别为

$$0+0+1+0=1,\ \text{或}\ 0+0+0+2=2.$$

所以, $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

4. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

解: (1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+15r_2]{r_4+7r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 17\times 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) 注意到 $r_1+r_2=r_4$, 所以原行列式值为 0.

(3)

$$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = adfbce\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} adfbce\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -adfbce\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 3 行}} (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix} = abcd+ab+cd+ad+1.$$

5. 求解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

解:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} x+3 & 2 & -1 \\ x+3 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} x+3 & 2 & -1 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)(x^2-3),$$

得方程的解为 $x=3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$, 其中 a, b, c 互不相等.

解: 由范德蒙德行列式结论, 原方程即

$$(c-b)(c-a)(b-a)(c-x)(b-x)(a-x)=0,$$

得方程的解为 $x=a, b, c$.

另解. 当 $x=a$ 时, 行列式两列相同, 其值为零, 即 $x=a$ 是方程的解. 同理 $x=b$, $x=c$ 也是方程的解. 而该行列式展开式只能是一个三次多项式, 方程最多有三个不同的解. 得 $x=a, b, c$ 是方程的全部解.

6. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$

证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} = (b-a)(b-a)\begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

证明:

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal[\text{分裂开}]{\text{按第 1 列}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{裂开}]{\text{再次}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{裂开}]{\text{再次}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

此题有一个“经典”的解法:

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

这个解法“看上去很美”, 实则是一个错解! 我们强调, 行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

证明:
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,4]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{两列成比例}} 0.$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$

证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,4]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$

证明: 方法一. 设法把主对角线上的 x 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-1}+xc_n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-2}+xc_{n-1}}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^3+a_1x^3+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_j+xc_{j-1}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\ &=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n. \end{aligned}$$

方法二. 设法把 -1 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.

若 $x\neq 0$, 则

$$D_n \xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+\frac{1}{x}c_2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$
= \begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\
a_n & a_{n-1} + \frac{a_n}{x} & a_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1
\end{vmatrix}
$$

这里,

$$
\begin{aligned}
P_2 &= a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \cdots + + \frac{a_n}{x^{n-2}}, \\
P_1 &= x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + + \frac{a_n}{x^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

得到下三角阵, 所以

$$D_n = x^{n-1} \cdot P_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

方法三. 用递归法证明. 记

$$
D_n = \begin{vmatrix}
x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1
\end{vmatrix},
$$

则

$$
\begin{aligned}
D_n \xlongequal{\text{展开 } c_1} & x \begin{vmatrix}
x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x & -1 \\
a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1
\end{vmatrix}
+ a_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix}
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x & -1
\end{vmatrix} \\
&= x D_{n-1} + a_n (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} = x D_{n-1} + a_n.
\end{aligned}
$$

所以, $D_n = x D_{n-1} + a_n$. 由此递归式得

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

方法四. 按最后一行展开. 先看 a_{n-i} 的代数余子式. 因为

$$
D_n = \left|\begin{array}{ccccc:c:cccc}
x & -1 & & & & & & & & \\
 & x & -1 & & & & & & & \\
 & & x & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & -1 & & & & & \\
 & & & & x & -1 & & & & \\
\hdashline
 & & & & & x & -1 & & & \\
 & & & & & & x & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & -1 & \\
 & & & & & & & & x & -1 \\
\hdashline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & a_{n-i} & a_{n-(i+1)} & & a_2 & x + a_1
\end{array}\right|
$$

划掉 a_{n-i} 所在的行和所在的列, 左上角是 $i \times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1) \times (n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

则 a_{n-i} 的代数余子式为 (注意到 a_{n-i} 处在第 n 行、$i+1$ 列)

$$(-1)^{n+i+1}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i\times i}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)\times(n-i-1)} = x^i$$

所以, D_n 按最后一行展开, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_{n-i}x^i + \cdots + a_2x^{n-2} + (x+a_1)x^{n-1} \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

方法五. 针对 c_1 作变换.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_1+xc_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_1+x^2c_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$.

再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

7. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$, $D_3=D$.

证明:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{n-2\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

同理可证

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_3=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=(-1)^{n(n-1)}D=D.$$

8. 计算下列各行列式 (D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中对角线上元素都是 a, 未写出的元素都是 0;

解: 方法一. 将 c_n 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

再将 r_n 作 $n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_n=(-1)^{n-2}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}=(a^2-1)a^{n-2}.$$

方法二.

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_1} a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + 1\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1\\ a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} a^n+(-1)^{n+1}\times 1\times(-1)^{(n-1)+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=a^n-a^{n-2}.$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

解: 方法一. 将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a\\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0\\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

方法二. 将各列都加到第一列得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a\\ x+(n-1)a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\big[x+(n-1)a\big]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a\\ 1 & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n=\big[x+(n-1)a\big]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=\big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

方法三. 升阶法.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x&a&\cdots&a\\0&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}\xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\-1&x-a&0&\cdots&0\\-1&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

若 $x=a$, 则 $D_n=0$. 若 $x\neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a}c_j$ 加到 c_1, $j=2,3,\cdots,n+1$:

$$\begin{aligned}D_n&=\begin{vmatrix}1+\frac{a}{x-a}n&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}\\&=\left(1+\frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n=\big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.\end{aligned}$$

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix}a^n&(a-1)^n&\cdots&(a-n)^n\\a^{n-1}&(a-1)^{n-1}&\cdots&(a-n)^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a-1&\cdots&a-n\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$; (提示: 利用范德蒙德行列式的结果.)

解: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 n 次相邻对换, 换到第 1 行; 第 n 行经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得 (或者直接由题 6 的结论)

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&a-1&\cdots&a-n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a^{n-1}&(a-1)^{n-1}&\cdots&(a-n)^{n-1}\\a^n&(a-1)^n&\cdots&(a-n)^n\end{vmatrix},$$

此行列式为范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法知, 这里的 $a=x_1$, $a-1=x_2$, $\dots$, $a-(n-1)=x_n$, $a-n=x_{n+1}$. 则 $x_i=a-(i-1)$, $x_j=a-(j-1)$. 所以

$$\begin{aligned}D_{n+1}&=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big(x_i-x_j\big)\\&=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[(a-i+1)-(a-j+1)\big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[-(i-j)\right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \times \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j) \\
&= \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j).
\end{aligned}
$$

或者: 把原行列式逆时针旋转 180°(即作两次逆时针旋转 90°), 由题 6 的结论, 易知

$$
D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^{n-1} & \big(a-(n-1)\big)^{n-1} & \cdots & a^{n-1} \\ (a-n)^n & \big(a-(n-1)\big)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix},
$$

对照范德蒙德行列式的写法知, $x_1=(a-n)$, $x_2=(a-n)+1$, $x_3=(a-n)+2$, $\cdots$, $x_i=(a-n)+(i-1)$, 所以 $x_i-x_j=i-j$, 得

$$
D_{n+1} = \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \big(x_i-x_j\big) = \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j).
$$

(4) $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & 0 & & & b_n \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & & & d_n \end{vmatrix}$;

解: 方法一. 将 c_{2n} 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 r_{2n} 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$
D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2} \begin{vmatrix} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} = (a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)},
$$

又 $n=1$ 时 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1d_1-b_1c_1$, 所以

$$
D_{2n} = (a_nd_n-b_nc_n)\cdots(a_1d_1-b_1c_1) = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).
$$

这个方法与教材 P.15 的例 11 相同. 本题的第 (1) 小题也用到了此方法.

方法二.

$$D_{2n} \xlongequal{\text{展开 } r_1} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & a_1 & b_1 & 0 & \vdots \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & a_1 & b_1 & 0 \\ & & & c_1 & d_1 & \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_{2n-1}} a_n d_n D_{2n-2} - b_n c_n D_{2n-2}.$$

由此得递推公式:

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2},$$

即 $D_{2n} = \prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) D_2$.

而 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$, 得 $D_{2n} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)$.

方法三. 用 Laplace 定理展开, 最简单. 此处略.

(5) $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i-j|$;

解: 由 $a_{ij} = |i-j|$ 得

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_j + c_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.$$

(6) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

解: 升阶法.

$$D_n=\left|\begin{array}{c:cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hdashline 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{array}\right|_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\xlongequal{c_1+\frac{1}{a_1}c_2}\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_1+\frac{1}{a_j}c_{j+1}}\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$=(a_1a_2\cdots a_n)\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big).$$

9. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}, 求

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}.$$

解: 所有形如

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ * & * & * & * \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

的行列式, 其第 3 行元素的代数余子式, 都是相同的.

所以

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24.$$

10. 用克莱姆法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$

解:

$$D=\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 1&2&-1&4\\ 2&-3&-1&-5\\ 3&1&2&11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&-2&3\\ 0&-5&-3&-7\\ 0&-2&-1&8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&-2&3\\ 0&0&-13&8\\ 0&0&-5&14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -13&8\\ -5&14 \end{vmatrix}=-142.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5&1&1&1\\ -2&2&-1&4\\ -2&-3&-1&-5\\ 0&1&2&11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5&1&-1&-10\\ 0&5&-5&-18\\ -2&-3&5&28\\ 0&1&0&0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5&-1&-10\\ 0&-5&-18\\ -2&5&28 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5&-1&-10\\ -4&0&10\\ 23&0&-22 \end{vmatrix}=-142;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1&5&1&1\\ 1&-2&-1&4\\ 2&-2&-1&-5\\ 3&0&2&11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&5&1&1\\ 0&-7&-2&3\\ 0&-12&-3&-7\\ 0&-15&-1&8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&5&1&1\\ 0&-1&3&2\\ 0&0&23&11\\ 0&0&39&31 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 23&11\\ 39&31 \end{vmatrix}=-284;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1&1&5&1\\ 1&2&-2&4\\ 2&-3&-2&-5\\ 3&1&0&11 \end{vmatrix}=-426; \qquad D_4=\begin{vmatrix} 1&1&1&5\\ 1&2&-1&-2\\ 2&-3&-1&-2\\ 3&1&2&0 \end{vmatrix}=142.$$

所以,

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1\,,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2\,,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3\,,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

(2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2 &&&&=1, \\ x_1+5x_2+6x_3 &&&&=0, \\ x_2+5x_3+6x_4 &&&&=0, \\ x_3+5x_4+6x_5 &&&&=0, \\ x_4+5x_5 &&&&=1. \end{cases}$

解: 系数行列式

$$D_{5\times5}=\begin{vmatrix} 5&6&&&\\ 1&5&6&&\\ &1&5&6&\\ &&1&5&6\\ &&&1&5 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_1}5D_{4\times4}-\begin{vmatrix} 6&0&0&0\\ 1&5&6&0\\ 0&1&5&6\\ 0&0&1&5 \end{vmatrix}$$

$$=5D_{4\times4}-6\begin{vmatrix} 5&6&0\\ 1&5&6\\ 0&1&5 \end{vmatrix}=5D_{4\times4}-6D_{3\times3}.$$

由递归式 $D_{5\times5}=5D_{4\times4}-6D_{3\times3}$ 知,

$$D_{3\times3}=5D_{2\times2}-6D_{1\times1}=5(25-6)-6\times5=65,$$
$$D_{4\times4}=5D_{3\times3}-6D_{2\times2}=5\times65-6\times19=211,$$

$$D_{5\times5}=5D_{4\times4}-6D_{3\times3}=5\times211-6\times65=665.$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{展开c_1}D_{4\times4}+\begin{vmatrix}6&0&0&0\\5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=D_{4\times4}+6^4=211+6^4=1507.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{展开c_2}\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+(-1)^{5+2}\begin{vmatrix}5&0&0&0\\1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{展开c_2}-D_{3\times3}-5\times6^3=-65-1080=-1145.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{展开c_3}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+(-1)^{5+3}\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{展开c_2}D_{2\times2}-6\times6\times D_{2\times2}=703.$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{展开c_4}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+(-1)^{5+4}\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{展开c_4}-5-6D_{3\times3}=-5-6\times65=-395.$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{展开c_5}(-1)^{1+5}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=1+D_{4\times4}=1+211=212.$$

所以,

$$x_1=\frac{1507}{665},\quad x_2=-\frac{1145}{665},\quad x_3=\frac{703}{665},\quad x_4=-\frac{395}{665},\quad x_5=\frac{212}{665}.$$

用克拉默法则解题没什么实用性, 其贡献在于理论上的重要意义. 比如这个题目用消元法要简便得多. 熟知克拉默法则的内容就可以了, 这个题目可以弃之不做.

11. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\mu x_2+x_3=0,\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解?

解: 系数矩阵

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=\mu(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda).$$

要使齐次线性方程组有非零解, 则 $D=0$, 即

$$\mu(1-\lambda)=0,$$

得 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$.

12. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2 + x_3=0,\\ x_1 + x_2+(1-\lambda)x_3=0.\end{cases}$ 有非零解?

解: 系数矩阵

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3+\lambda & 4\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}+(1-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-3)-4(1-\lambda)+(1-\lambda)^3-2(1-\lambda)(-3+\lambda)\\ &=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3\\ &=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda).\end{aligned}$$

齐次线性方程组有非零解, 则 $D=0$, 即

$$\lambda(\lambda-2)(3-\lambda)=0.$$

得 $\lambda=0$, $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$.

第二章　矩阵及其运算

1. 计算下列乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $(1,\ 2,\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,\ 2)$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 7+3\times 2+1\times 1 \\ 1\times 7+(-2)\times 2+3\times 1 \\ 5\times 7+7\times 2+0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$.

(2) $(1,\ 2,\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\times 3+2\times 2+3\times 1) = (10) = 10$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,\ 2) = \begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 \\ 1\times(-1) & 1\times 2 \\ 3\times(-1) & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

(5)

$$\begin{aligned}
&(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
=&(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
=&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.
\end{aligned}$$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,
求 $3\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.
解:

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A} &= 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.
解: 方法一. 直接代入. 比如:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + y_3 \\ &= 2(-3z_1 + z_2) + (-z_2 + 3z_3) \\ &= -6z_1 + z_2 + 3z_3. \end{aligned}$$

方法简单, 但我们应尽可能使用本章学习的矩阵知识.
方法二. 由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3, \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ 吗?

解: (1) 因为

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

所以,

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}.$$

(2) 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2.$$

(3) 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2.$$

当然, 一个简单的说法是, 在得到 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ 之后, 直接有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2,$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{B}^2 \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2.$$

5. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解: (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$.

(3) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$.

题 5 和题 6 看上去很简单, 实则是再次提醒我们注意矩阵运算不满足交换律, 不满足零律, 不满足消去律. 这是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的 “加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点 “相同” 而忘记二者本质的不同.

这种不同的讨论范围里的 “加法”、“乘法”, 还有很多很多, 在现代数学里非常广泛和一般.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{A}^k$.

解: 由计算

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}.$$

猜测: $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}$. 下用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时, 显然成立. 假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(k+1)\lambda&1\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法知: $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解: 方法一. 首先计算

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}.$$

猜测: $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$, $(n \geqslant 2)$.

下用数学归纳法证明:

当 $n=2$ 时, 显然成立.

假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由数学归纳法得证: $\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$.

上面的猜测其实是不容易得到的. 这里另有一个解法.

方法二. 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}.$$

则[1]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^n &= (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^n \\ &= (\lambda\boldsymbol{E})^n + C_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B} + C_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + \boldsymbol{B}^n. \end{aligned}$$

注意到

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{B}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (k \geqslant 3).$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^n &= (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^n \\ &= (\lambda\boldsymbol{E})^n + C_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B} + C_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1] 注意对一般的矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 并不能对 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n$ 得到牛顿二项式展开式. 比如最简单的情形

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2,$$

我们就知道其不一定成立. 除非 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换. 而这里的 $\lambda\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 当然是可交换的.

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

证明: 即要证 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 由公式 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} &= \big((\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\big)^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \\ &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

得证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称阵.

9. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

证明: 已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$, 要证

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

充分性: 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 又

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A},$$

所以, $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵.

必要性: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. 又

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A},$$

所以, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

10. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

解: (1) 由 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}| = 1 \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 又

$$A_{11} = 5, \quad A_{21} = 2 \times (-1), \quad A_{12} = 2 \times (-1), \quad A_{22} = 1.$$

得

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

建议记住教材 P.44 **例** 10 的结论:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

其中 $ad - cb \neq 0$.

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

解: $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$, 由上述结论得

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

解: $|\boldsymbol{A}| = 2$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 又

$$\begin{aligned} &A_{11} = -4, && A_{21} = 2, && A_{31} = 0, \\ &A_{12} = -13, && A_{22} = 6, && A_{32} = -1, \\ &A_{13} = -32, && A_{23} = 14, && A_{33} = -2. \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, $(a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$.

解: 由对角矩阵的性质知

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

11. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

解: (1) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

解:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

12. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$

解: (1) 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

解: 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

13. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解: 方法一. 用消元法解方程, 得出 y_1, y_2, y_3. 略.

方法二. 解矩阵方程. 由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

方法三. 用克拉默法则解方程. 系数矩阵

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-2c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & -9 & 5 \\ -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

所以,

$$y_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 5 \\ x_3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3\ ;$$

同理得 $y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3$, $y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{2}$, 求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - 5\boldsymbol{A}^*\right|$.

解: 由

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right| &= \left|\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right| && (|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|)\\ &= \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}-5\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right| && ((\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1})\\ &= \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-5\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}\right|\\ &= \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\frac{5}{2}\boldsymbol{E}\right| && (|\boldsymbol{A}|=\tfrac{1}{2})\\ &= |-2\boldsymbol{E}|\\ &= (-2)^3\,|\boldsymbol{E}| && (|k\boldsymbol{A}|=k^n\,|\boldsymbol{A}|)\\ &= -8.\end{aligned}$$

得

$$\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right|=-16.$$

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}.$$

故

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

16. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$. 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}\\ \Longrightarrow\ &\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\\ \Longrightarrow\ &(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),\end{aligned}$$

又

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆. 所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

17. 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,\,-2,\,1)$, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$. 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(1,\ -2,\ 1)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$|\boldsymbol{A}| = -2.$$

由

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E} \\
\Longrightarrow\ &\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{B} - 8\boldsymbol{A}^{-1} && (\text{上式两边右乘 } \boldsymbol{A}^{-1}) \\
\Longrightarrow\ &|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - 8\boldsymbol{E} && (\text{上式两边左乘 } \boldsymbol{A}) \\
\Longrightarrow\ &-2\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - 8\boldsymbol{E} && (|\boldsymbol{A}| = -2) \\
\Longrightarrow\ &\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{E},
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big) &= \mathrm{diag}(2,\ -1,\ 2), \\
\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)^{-1} &= \mathrm{diag}(\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},)
\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{B} = 4\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)^{-1} = \mathrm{diag}(2,\ -4,\ 2).$$

18. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^* = \mathrm{diag}(1,1,1,8)$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{E}$. 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 解法与上题相似.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{E} \\
\Longrightarrow\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A} && (\text{上式两边右乘 } \boldsymbol{A}) \\
\Longrightarrow\ &|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} + 3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E} && (\text{上式两边左乘 } \boldsymbol{A}^*) \\
\Longrightarrow\ &\big(\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*\big)\boldsymbol{B} = 3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

由公式 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 又计算得 $|\boldsymbol{A}^*| = 8$, 所以

$$|\boldsymbol{A}|^3 = 8,\ \text{即}\ |\boldsymbol{A}| = 2.$$

得

$$\big(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*\big)\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{E}.$$

又

$$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\big(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{B} = 6\big(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^*\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

解: $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$. 所以

$$\boldsymbol{A}^{11}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{11}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

又

$$|\boldsymbol{P}|=3,\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{11}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{pmatrix}.$$

20. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8(5\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 注意到 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵, 则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$. 又

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=5\boldsymbol{A}^8-6\boldsymbol{A}^9+\boldsymbol{A}^{10}\\ &=\boldsymbol{P}\big(5\boldsymbol{\Lambda}^8-6\boldsymbol{\Lambda}^9+\boldsymbol{\Lambda}^{10}\big)\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,1,5)$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}^8&=\mathrm{diag}(1,1,5^8),\\ \boldsymbol{\Lambda}^9&=\mathrm{diag}(-1,1,5^9),\\ \boldsymbol{\Lambda}^{10}&=\mathrm{diag}(1,1,5^{10}),\\ 5\boldsymbol{\Lambda}^8-6\boldsymbol{\Lambda}^9+\boldsymbol{\Lambda}^{10}&=\mathrm{diag}(12,0,0).\end{aligned}$$

21. 设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ (k 为正整数), 证明

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

证明: 验证

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}$$

即可. 下略.

22. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

证明: 直接求逆即可.

由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}).\end{aligned}$$

又由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

这类题目的解法就是要"凑"出要求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$.

23. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明其伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*$.

证明: 验证 $\boldsymbol{A}^*\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*=\boldsymbol{E}$ 即可.

因为

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E},$$

而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,\quad \text{即 } \boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^*\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*&=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* && (\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1})\\&=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E} && (\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{E}. && (|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=1)\end{aligned}$$

得证矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*$.

24. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵为 $\boldsymbol{A}^*$, 证明:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 这导致 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$. 与假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 矛盾. 故当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时有 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}$ 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*|=\big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}\big|=|\boldsymbol{A}|^n\,.$$

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 由 (1) 知 $|\boldsymbol{A}^*|=0$ 此时命题也成立.

故有

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\,.$$

25. 计算 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解:

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\0&1&0&1\\\hdashline 0&0&2&1\\0&0&0&3\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\\hdashline 0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{array}\right)&\triangleq\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

26. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ 4 & -3 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} \\ & & 2 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\left|\boldsymbol{A}^8\right|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$.

解: 记 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^8 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^8 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^8 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{aligned} \left|\boldsymbol{A}^8\right| &= \left|\boldsymbol{A}_1^8\right| \left|\boldsymbol{A}_2^8\right| = \left|\boldsymbol{A}_1\right|^8 \left|\boldsymbol{A}_2\right|^8 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^8 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^8 \\ &= 10^{16}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^4 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & & \\ 0 & 5^4 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} \\ & & 2^4 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

27. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}$;

解: 设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_s \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_1$ 为 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}_2$ 为 $s\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{C}_3$ 为 $n\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}_4$ 为 $n\times s$ 矩阵. 又

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & A_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_4 \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_3 = \boldsymbol{E}_n & \Rightarrow \boldsymbol{C}_3 = \boldsymbol{A}^{-1}, & \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{O} & \Rightarrow \boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{O}, & (\boldsymbol{A}^{-1} \text{ 可逆}) \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{O} & \Rightarrow \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{O}, & (\boldsymbol{B}^{-1} \text{ 可逆}) \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{E}_s & \Rightarrow \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{B}^{-1}. & \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}$;

解: 设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}.$$

又

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E} & \Rightarrow\ \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O} & \Rightarrow\ \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O} & \Rightarrow\ \boldsymbol{A}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E} & \Rightarrow\ \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

28 . 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

解: 由分块对角阵的性质知

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ \hdashline & & 8 & 3 \\ & & 5 & 2 \end{array}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \\ & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & & \\ -2 & 5 & & \\ & & 2 & -3 \\ & & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

解: 记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 又

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

本章的重要题型有两个:

- 解矩阵方程的新方法, 习题 5, 6.
- 方程组解的讨论, 习题 16, 17, 18. 例题见教材 P.75 **例** 13.

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解: (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2\div(-1)}{\underset{r_3\div(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_3\div 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+3r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2}{\underset{r_1+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_2\times 2-3r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\underset{r_1+3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1\div 2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_2-3r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\div(-4)}{\underset{\substack{r_3\div(-3) \\ r_4\div(-5)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\underset{\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2}{\underset{\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-2r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3-8r_1\\ r_4-7r_1}}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}0&-1&1&1&1\\1&0&2&0&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix} \underset{\substack{r_2\times(-1)\\ r_4-r_3}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$, 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PA}$ 为行最简形.

解: 仿 P.64 例 1.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&4&1&0&0\\2&3&4&5&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&4&1&0&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&-6&-12&-18&-5&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_1+2r_2}{\overset{r_3-6r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&-1&-2&-3&-2&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{array}\right)\overset{r_2\times(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&-1&-2&-3&-2&0\\0&1&2&3&2&-1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{array}\right),$$

即所求矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\2&-1&0\\7&-6&1\end{pmatrix}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$,

(1) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PA}$ 为行最简形;

(2) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}}$ 为行最简形.

解: (1) 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|cc}-5&3&1&1&0\\2&-1&1&0&1\end{array}\right)\overset{r_1+3r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&1&3\\2&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_2-2r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&1&3\\0&-1&-7&-2&-5\end{array}\right)\overset{r_2\times(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&1&3\\0&1&7&2&5\end{array}\right),$$

即所求矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}.$$

(2) 由

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc|ccc}-5&2&1&0&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{r_1+2r_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&2&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&2&0\\0&-1&-3&-5&0\\0&1&-1&-2&1\end{array}\right)\underset{r_2\times(-1)}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&2&0\\0&1&3&5&0\\0&1&-4&-7&1\end{array}\right)$$

即所求矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&0\\-4&-7&1\end{pmatrix}.$$

4. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

解: (1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_2-2r_3}{\overset{r_1-r_3/2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)\underset{r_3\div 2}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&\frac{7}{2}&2&-\frac{9}{2}\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1\div 3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

即逆矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_3-3r_1}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\underset{r_4-2r_1}{\overset{r_3-4r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{array}\right)\overset{r_4+2r_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{r_2-r_4\\ r_1+2r_4}}{\overset{r_3-r_4}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&0&4&2&-11&-20\\0&1&2&0&-2&-1&6&11\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)\underset{r_1+3r_3}{\overset{r_2-2r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&0&0&1&-1&-2&-2\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1+2r_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)$$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

5. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

解: (1)

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{r_1-r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right) \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2+2r_3 \\ r_3\times(-1)}}{\overset{r_1-r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array}\right).$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{c_1\leftrightarrow c_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \overset{c_2-2c_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ \hdashline 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{c_2+4c_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{c_3-2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{array}\right) \underset{\substack{c_1-4c_3 \\ c_3\times(-1)}}{\overset{c_2-c_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & 1 \\ 17 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{c_1-3c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{array}\right).$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

本题解法与教材 P.65 **例 3** 相同, 是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型.
在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上

$$已知\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\ 所以\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆, 此时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$

又

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{array}\right)\underset{\sim}{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&-2&1&1\end{array}\right)$$
$$\underset{\sim}{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&0&-2&-2&2&0\end{array}\right)\underset{\sim}{r_3\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$$
$$\underset{\sim}{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)\underset{\sim}{r_2\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$$
$$\underset{\sim}{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)\underset{\sim}{r_1\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

7. 在秩是 r 的矩阵中, 有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

解: 由矩阵秩的定义, 在秩是 r 的矩阵中, 至少存在一个不等于 0 的 r 阶子式, 而且所有阶数高于 r 的子式全等于 0. 由此可知, 在秩是 r 的矩阵中, 可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式 (但是不能全等于 0), 也可能存在等于 0 的 r 阶子式.

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(\boldsymbol{A})=2$, 其中存在等于 0 的 2 阶子式和 1 阶子式.

8. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 问 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的秩的关系怎样?

解: 不妨把题设改为: 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$.

记划去的那一列为 $\boldsymbol{a}$, 则

$$\boldsymbol{A}\sim(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{a}).$$

从而,

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{a}).$$

由矩阵秩的性质 5,

$$R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{a}) \leqslant R(\boldsymbol{B}) + 1,$$

所以,

$$R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{B}) + 1.$$

即, $R(\boldsymbol{A})$ 等于 $R(\boldsymbol{B})$ 或者 $R(\boldsymbol{B}) + 1$.

9. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1,\,0,\,1,\,0,\,0), \quad (1,\,-1,\,0,\,0,\,0).$$

解: 符合条件的矩阵有很多, 比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这两个矩阵容易分别变换为行阶梯型、列阶梯型矩阵, 非零行有 4 行.

10. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}; \qquad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 - 3r_1}{\overset{r_3 - r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \overset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 2; 或者直接由 $r_1 = 2r_2 + r_3$ 及 $r_2,\, r_3$ 不成比例, 得秩为 2.

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, 为一个最高阶非零子式.

(2) 因 $r_3 = r_1 + 2r_2$, 又 r_1 与 r_2 不成比例, 所以矩阵秩为 2;

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$, 为一个最高阶非零子式.

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_4}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -4 & 12 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2 - r_3 \\ r_3 \div 2}}{\overset{r_1 \div 4}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_3 - r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_1\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 3;

三阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$, 为一个最高阶非零子式.

11. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

证明: 必要性即教材 P.68 定理 2. 只需证明充分性.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的标准型矩阵为 $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

同样, $\boldsymbol{B}$ 的标准型矩阵也为 $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\boldsymbol{B} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

由矩阵等价的传递性, 得

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}.$$

12. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

问 k 为何值, 可使

(1) $R(\boldsymbol{A}) = 1$; (2) $R(\boldsymbol{A}) = 2$; (3) $R(\boldsymbol{A}) = 3$.

解:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}\underset{c_3\div 3}{\overset{c_2\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-kr_1}{\overset{r_2+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{pmatrix}\underset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix},$$

所以, 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(\boldsymbol{A}) = 3$.

当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $R(\boldsymbol{A})=1$.

当 $k=-2$ 时, $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $R(\boldsymbol{A})=2$.

另解: 由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, $R(\boldsymbol{A})=3$, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&-1&k\\-1&k&-1\\k&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_1]{r_3-kr_1}6\begin{vmatrix}1&-1&k\\0&k-1&k-1\\0&k-1&1-k^2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}6\begin{vmatrix}1&-1&k\\0&k-1&k-1\\0&0&2-k-k^2\end{vmatrix}=-6(k-1)^2(k+2).$$

所以, 当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时, $R(\boldsymbol{A})=3$.

余下的讨论与前相同.

13. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0,\\3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0,\\4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0,\\x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0,\\2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0,\\4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0,\\7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$

解: (1) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\underset{r_2-r_1}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\1&0&-1&0\\0&1&0&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1-r_2-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&3&-4\\1&0&-1&0\\0&1&0&3\end{pmatrix}\overset{r_1\div 3}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&1&-\frac{4}{3}\\1&0&-1&0\\0&1&0&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&1&-\frac{4}{3}\\1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases}x_1=\frac{4}{3}x_4,\\x_2=-3x_4,\\x_3=\frac{4}{3}x_4,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$, c 为任意实数.

(2) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\div(-4)}{\overset{r_3-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意实数.

(3) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3-4r_1 \\ r_2-2r_1}}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 9 & -19 & 34 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{pmatrix} \underset{7r_3-9r_2}{\overset{r_4-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & -43 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+43r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 327 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

(4) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_4-r_1-2r_2}{\overset{r_3-2r_1+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即得 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$

所以方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意实数.

14. 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2; \end{cases}$

解: (1) 对系数的增广矩阵实施行变换, 有

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{4r_2-3r_1}{\overset{r_3-2r_1-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

看见

$$R(\boldsymbol{A}) = 2, \text{ 而 } R(\boldsymbol{B}) = 3,$$

故方程组无解.

(2) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \underset{r_4-r_1-2r_2}{\overset{r_3-2r_1+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即得

$$\begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = z + 2, \\ z = z. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, c 为任意实数.

(3) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ y = y, \\ z = z, \\ w = 0. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意实数.

(4) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_3 - 2r_1 + r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2r_2 - 3r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \\ z = z, \\ w = w. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 为任意实数.

15. 写出一个以

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

解: 把解的形式改写为 $\begin{cases} x_1 = 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

得一个所求的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

16. λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解?

解: (1) 记系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时方程组有惟一解. 由

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

得 $\lambda \neq 1$, 且 $\lambda \neq -2$ 时方程组有惟一解.

(2) $\lambda = -2$ 时,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

知 $R(\boldsymbol{A}) = 2 < R(\boldsymbol{B}) = 3$, 此时方程组无解.

(3) $\lambda = 1$ 时,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

知 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 1$, 此时方程组有无限多解.

我们强调, 这一类的题型是必须掌握的. 更一般的解法是, 通过行变换, 讨论 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{B})$ 的关系. 比如这一题,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}.$$

当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$, 且 $(1-\lambda)(1+\lambda)^2\neq 0$, 即 $\lambda=-2$ 时, 方程组无解. 其他的讨论类似.

17. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2,\end{cases}$$

当 λ 取何值时有解? 并求出它的解.

解:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\underset{}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda\\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}.$$

要使方程组有解, 须 $(1-\lambda)(\lambda+2)=0$, 得

$$\lambda=1,\ \text{或}\ \lambda=-2.$$

当 $\lambda=1$ 时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-2$ 时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

18. 设

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1,\end{cases}$$

问 λ 为何值时, 此方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有惟一解.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+2r_3]{r_2+4r_1}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 4 & 0\\ 2 & 9-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 4\\ 2 & 9-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, 有惟一解.

当 $\lambda = 10$ 时, 增广矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \underset{r_3+r_2}{\overset{r_1+4r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 & 9 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

可见 $R(\boldsymbol{A}) = 2$, $R(\boldsymbol{B}) = 3$, 此时方程组无解.

当 $\lambda = 1$ 时, 增广矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组有无限多解. 且原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

19. 证明 $R(\boldsymbol{A}) = 1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 及非零行向量 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

证明: (充分性) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$. 由矩阵秩的性质 7 有

$$R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}) \leqslant R(\boldsymbol{a}). \tag{3.1}$$

又 $R(\boldsymbol{a}) = 1$, 所以

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1. \tag{3.2}$$

但是 $R(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 因为非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 分别至少存在一个非零元素, 记为 a_i, b_j. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个非零元 a_ib_j(即 $\boldsymbol{A}$ 的一阶非零子式), 从而

$$R(\boldsymbol{A}) \geqslant 1. \tag{3.3}$$

综合 (3.2), (3.3), 所以 $R(\boldsymbol{A}) = 1$.

(必要性) 设 $R(\boldsymbol{A}) = 1$. 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0 \cdots, 0)\, \boldsymbol{Q}.$$

记

$$\boldsymbol{a} \triangleq \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} \triangleq (1, 0 \cdots, 0)\, \boldsymbol{Q},$$

注意到 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 其中不可能有全为零的行或列, 从而 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 即是满足条件的非零向量.

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$, 证明线性方程 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 同解.

证明: 方程 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}$. 所以 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解都满足方程 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$.

反之, 对 $\boldsymbol{A(Bx)} = \boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, 则方程只有零解, 即 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$.

所以两个方程同解.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 证明
方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}_m$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = m$;
证明: 由教材 P.77 定理 6, 方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}_m$ 有解的充分必要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_m).$$

$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则

$$R(\boldsymbol{A}) \leqslant m.$$

而由矩阵秩的性质 5,

$$m = R(\boldsymbol{E}_m) \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_m) = R(\boldsymbol{A}).$$

所以, $R(\boldsymbol{A}) = m$.

第四章　向量组的线性相关性

1. 已知向量组

$$A:\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix};\quad B:\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明: 要证 B 组能由 A 组线性表示, 由 P.84 定理 2, 即要证矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ 的秩. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\2&1&0&1&1&1\\3&2&1&2&1&3\end{array}\right)\underset{r_4-3r_2}{\overset{r_3-2r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&2&-8&-1&7&-9\end{array}\right)$$

$$\underset{r_4-2r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&20&5&15&25\\1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&3&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&3&5\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

可见, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$, 因此, B 组能由 A 组线性表示.

又

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-r_3\\r_4-2r_3}}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&-3&3\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{B})=2$. 而 $R(\boldsymbol{A})=3$, 所以 A 组不能由 B 组线性表示. (因为若 A 组能由 B 组线性表示, 则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$. 见教材 P.85 **定理** 3.)

2. 已知向量组

$$A:\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\quad B:\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

证明 A 组与 B 组等价.

证明: 方法与教材 P.85 **例** 2 相同. 下证 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&-1&1&3\\1&1&0&2&2\\1&0&1&1&-1\end{array}\right)\overset{r_2-r_1-r_3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\\1&0&1&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&1&-1\\0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$. 又由上述初等变换知

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{B})=2$. 得到 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 即证 A 组与 B 组等价.

另证. 易见

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{b}_3=-\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2,$$

及

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2),\quad \boldsymbol{a}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1).$$

知 A 组与 B 组等价.

3. 已知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$, $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$, 证明

(1) $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

证明: (此题与 P.90 例 7 重复了.)

(1) 由 $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$, 知 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关. 从而向量组 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关 (整体无关则部分也无关. 见 P.89 **定理** 5(1)).

又 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2<3$, 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关. 由 P.89 **定理** 5(3) 知 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

(2) 假设 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示. 已证 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 所以 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示. 这与 $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$ 矛盾.

得证 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

4. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

解: (1) 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r_2+3r_1}{\underset{r_3+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=2$, 所以该向量组是线性相关的.

或者: 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{\underset{r_2+3r_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{vmatrix}=0,$$

所以该向量组是线性相关的.

或者: 由

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix},$$

知线性相关.

(2) 因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}\overset{r_2\times 2-3r_1}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&11&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{B})=3$, 所以该向量组是线性无关的.

5. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}.$$

解: 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关的充要条件是 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)<3$, 即 $|\boldsymbol{A}|=0$, 这里 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$. 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}\overset{r_1-ar_3}{\underset{r_2-r_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&a+1&1-a^2\\0&a+1&-1-a\\1&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2).$$

所以, $a=-1$ 或 $a=2$ 时向量组线性相关.

6. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关, 求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

解: 设 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$. 由 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关, 则存在不全为零的 x_1,x_2 使得

$$x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

代入 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$, 得

$$\big[x_1(k_1+1)+x_2k_1\big]\boldsymbol{a}_1+\big[x_1k_2+x_2(k_2+1)\big]\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}. \tag{4.1}$$

由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 得

$$\begin{cases}x_1(k_1+1)+x_2k_1=0,\\x_1k_2+x_2(k_2+1)=0.\end{cases} \tag{4.2}$$

要使 x_1,x_2 不全为零, 则方程组 (4.2) 中系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix}k_1+1&k_1\\k_2&k_2+1\end{vmatrix}=k_1+k_2+1=0.$$

所以

$$\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=k_1\boldsymbol{a}_1-(1+k_1)\boldsymbol{a}_2,$$

或者记为

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(1+c)\boldsymbol{a}_2,\quad (c\in\mathbb{R}).$$

7. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性相关, 问 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是否一定线性相关? 试举例说明之.

解: 不一定. 比如取

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},$$

此时 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性相关, 但是 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是线性无关的.

8. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的, 则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m = \mathbf{0}$$

成立, 则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 全为 0 时, 等式

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m = \mathbf{0}$$

才能成立, 则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关, 则有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m = \mathbf{0}$$

同时成立.

解: (1) 设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), \\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{a}_3 = \cdots = \boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

满足 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 但 $\boldsymbol{a}_1$ 不能由 $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 由有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

上式可化为

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + \cdots + \lambda_m(\boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{b}_m) = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

取

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{e}_m,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 为单位向量, 则 (4.4) 式成立, 而 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(3) 由仅当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 全为 0 时,

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m = \mathbf{0},$$

得 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{b}_m$ 线性无关.

取 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$, 取 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 为线性无关组, 满足以上条件. 但不能说 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 是线性无关的.

(4) 取 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}_1 = (0, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 4)^{\mathrm{T}}$,

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 \ = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = -\tfrac{3}{4}\lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

与题设矛盾.

9. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

证明: 因为

$$\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4 = \mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

10. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证明: 设

$$k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{0}, \tag{4.5}$$

则

$$(k_1+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(k_i+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_i+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}. \tag{4.6}$$

因向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0, \\ \qquad k_2+\cdots+k_r=0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad k_r=0. \end{cases} \tag{4.7}$$

通过回代可直接解得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

即, 要使 (4.5) 成立当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$. 所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

这是一个常见的题型, 使用的解法也是很典型的. 解法同教材 P.88 **例** 6 的**证一**.

证二. 因为

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

而矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 所以

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r.$$

所以, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证三. 由题设知向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性表示; 又 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{b}_r-\boldsymbol{b}_{r-1}$, 知向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性表示. 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 等价. 又 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 知

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r.$$

所以, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证四. 记矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r) \\ &\overset{c_r-c_{r-1}}{\underset{\substack{\cdots \\ c_2-c_1}}{\sim}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r), \end{aligned}$$

从而,

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r,$$

知 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

11. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

(1) $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}=(1, 2, 1, 3), \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}=(4, -1, -5, -6), \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}=(1, -3, -4, -7)$.

解: (1) 由

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\9&100&10&4\\-2&-4&2&-8\end{pmatrix}\underset{r_2-9r_1}{\overset{r_3+2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\0&82&19&-32\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 秩为 2, 一组最大线性无关组为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ (或者 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$).

或者: 注意到 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_3$ 对应坐标成比例, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关. (这就已经告诉我们这个向量组的秩至多为 2 了.) 而 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 不成比例, 两者线性无关, 知向量组的秩为 2, 最大线性无关组为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ (或者 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$).

(2) 由

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&-5&-6\\1&-3&-4&-7\end{pmatrix}\underset{r_2-4r_1}{\overset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&-9&-9&-18\\0&-5&-5&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&-9&-9&-18\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知向量组 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2, 最大线性无关组为 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$.

12. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组, 并把其余列向量用最大无关组线性表示:

(1) $\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-3r_1\\r_4-r_1}}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&1&3&5\end{pmatrix}\overset{r_4-r_2-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以向量组的秩为 3, 且第 1、2、3 列构成一个最大无关组. 记这 4 列分别为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\,\boldsymbol{a}_4$, 由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\,\boldsymbol{a}_4)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2-2r_3}{\overset{r_1-17r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}25&31&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{(r_1-31r_2)\div 25}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{a}_4=\frac{8}{5}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3$.

(2) 记这 4 列分别为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\,\boldsymbol{a}_4$, 由

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\underset{r_4\div(-2)}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1-2r_4\\(r_2-r_4)\div 2}}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&1&0&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 构成一个最大无关组, 且 $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5 = -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$.

13. 设向量组

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求 a, b.

解: 依次记这 4 个向量为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$, 并记此向量组为 A. 易见 $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关 (因这两个向量对应坐标不成比例), 而已知向量组 A 的秩为 2, 所以 $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 是向量组 A 的一个最大无关组. 则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 可以由向量组 $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性表示.

设

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $x = 0$, $y = 1$, 从而 $a = 2$.

用同样的方法可以计算得 $b = 5$.

14. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

证明: 向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 则

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \leqslant R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n). \qquad \text{(P.85 定理 3)}$$

而

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = n, \ \text{且}\ R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \leqslant n,$$

所以

$$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = n.$$

得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

另证. 注意 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 当然是可以由单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示的, 再加上已知条件, 知两向量组等价. 所以

$$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = n,$$

得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

15. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证明: (充分性) 设任一 n 维向量都可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 则 n 维单位向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示. 由上一题得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

(必要性) 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关. 任给 n 维向量 $\boldsymbol{b}$, 则向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性相关 ($n+1$ 个 n 维向量是线性相关的).

由 P.89 定理 5(3), 则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示 (且表示式是惟一的).

必要性的另一个说法: 若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关, 注意到这是一组 n 维向量, 则它们是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以任一 n 维向量都可由它们线性表示.

16. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 证明存在某个向量 $\boldsymbol{a}_k$ $(2 \leqslant k \leqslant m)$, 使 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

证明: 假设不存在这样的 $\boldsymbol{a}_k$. 则 $\boldsymbol{a}_2$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1$ 线性表示, 从而向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关.

$\boldsymbol{a}_3$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性表示, 又向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关.

依次类推, 可以得到向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关. 这与题设矛盾. 假设不成立. 得证.

17. 设向量组 B: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 能由向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K},$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的秩 $R(\boldsymbol{K}) = r$.

证明: (必要性) 设 B 组线性无关.

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$ 则有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}. \tag{4.8}$$

由秩的性质知

$$R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}) \leqslant R(\boldsymbol{K}). \tag{4.9}$$

而由 B 组线性无关知 $R(\boldsymbol{B}) = r$, 故 $R(\boldsymbol{K}) \geqslant r$.

又 $\boldsymbol{K}$ 为 $r \times s$ 阶矩阵, 则 $R(\boldsymbol{K}) \leqslant \min\{r, s\} \leqslant r$.

综上知 $R(\boldsymbol{K}) = r$.

(充分性) 若 $R(\boldsymbol{K}) = r$. 令

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}. \tag{4.10}$$

下证方程 (4.10) 只有零解. 为方便记方程 (4.10) 为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.11}$$

代入 (4.8) 式则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.12}$$

由向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关, 有 $R(\boldsymbol{A}) = r$. 所以方程 (4.12) 只有零解:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.13}$$

又 $R(\boldsymbol{K}) = r$, 所以方程 (4.13) 只有零解:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

充分性的证明过程, 就是在本章习题 10 中提到的 "典型解法", 这里只是改用矩阵的方式在说问题. 或者说, 表达方式同教材 P.88 **例** 6 的**证二**.

18. 设

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \quad\quad \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 \quad\quad + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n, \\ \quad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{n-1}. \end{cases}$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证明: 由题设知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 下面只需证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示即可.

由题设得

$$\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n = (n-1)(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n),$$

所以

$$(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n.$$

得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_1, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_n. \end{cases}$$

得证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

综上, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

另一个思路: 先说明系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

再得两向量组等价.

19. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关, (1) 记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PB}$; (2) 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解: (1) 由 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\text{由 } \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是 3 阶方阵, 又向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关, 所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PBP}^{-1}$, 两边取行列式得,

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = 0.$$

20. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

(3) $nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots 2x_{n-1} + x_n = 0$.

解: (1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 3r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix} \underset{r_3 \div 8}{\overset{r_2 \div 4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\div 4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1=-4x_3, \\ x_2=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4, \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 或者写为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow[2r_2-3r_1]{r_3-r_1-2r_2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 19]{r_1\div 2+\frac{3}{38}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1=-\frac{2}{19}x_3+\frac{1}{19}x_4, \\ x_2=-\frac{14}{19}x_3+\frac{7}{19}x_4. \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 或者写为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$.

(3) 原方程即为

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}.$$

或者

$$\begin{cases} x_1= & x_1, \\ x_2= & \qquad x_2, \\ \quad\vdots & \\ x_{n-1}= & \qquad\qquad x_{n-1}, \\ x_n= & -nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}. \end{cases}$$

所以基础解系为

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 且

$$R(\boldsymbol{B})=2.$$

解: 由于 $R(\boldsymbol{B})=2$, 所以可设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$. 则由

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\2&0&8&0\\0&2&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-9\\5\end{pmatrix},$$

解此非齐次线性方程组可得惟一解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故所求矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{11}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \text{或者}\quad \begin{pmatrix}2&0\\0&2\\11&1\\-5&1\end{pmatrix}.$$

此题中满足条件的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 显然不止一个. 比如在

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$$

两边同时右乘某个初等矩阵, 则等式右边的 $\boldsymbol{O}$ 不变, 而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 被进行列变换而发生了改变.

这也是为什么把 $\boldsymbol{B}$ 设为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},$$

而不需要设为

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\\x_5&x_6\\x_7&x_8\end{pmatrix}$$

的原因.

22. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,\,1,\,2,\,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(3,\,2,\,1,\,0)^{\mathrm{T}}.$$

解: 显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},\ (k_1,\,k_2\in\mathbb{R}).$$

即

$$\begin{cases}x_1=3k_2,\\x_2=k_1+2k_2,\\x_3=2k_1+k_2,\\x_4=3k_1.\end{cases}$$

消去 k_1, k_2 得

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0,\\x_1-3x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

此即所求的齐次线性方程组.

23. 设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0;\end{cases}\qquad \mathrm{II}:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解: (1) 因为

$$\mathrm{I}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2,\\x_4=x_2;\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2,\\x_2=x_2,\\x_3=x_3,\\x_4=x_2;\end{cases}$$

所以 I 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

由

$$\mathrm{II}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2-x_3,\\x_4=-x_2+x_3;\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2-x_3,\\x_2=x_2,\\x_3=x_3,\\x_4=-x_2+x_3;\end{cases}$$

所以 II 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 联立方程组 I 和 II 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_4+r_2}{\overset{r_3-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_4+r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

得方程组 I 与 II 的公共解为

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

24. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 证

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n.$$

提示: 利用矩阵性质 6 和 8.

证明: 由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$, 根据矩阵秩的性质 8(P.70), 知

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n.$$

又由矩阵秩的性质 6(P.70), 有

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{E}) = n.$$

所以 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n$.

注意其中提到的 $R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = R(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$. 一般地, $R(-\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A})$, 或 $R(k\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A})$, k 为非零常数.

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵, 证明

$$R(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } R(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & \text{当 } R(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

解: (1) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 从而矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 得 $R(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个元素非零, 得

$$R(\boldsymbol{A}^*) \geqslant 1. \tag{4.14}$$

又由 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$ 知 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}.$$

由矩阵性质 8 知

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n.$$

代入 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$, 得

$$R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1. \tag{4.15}$$

综合 (4.14) 式和 (4.15) 式得

$$R(\boldsymbol{A}^*) = 1.$$

(3) 若 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2$. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所以 $n-1$ 阶子式全为零, 这使得 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 所以

$$R(\boldsymbol{A}^*) = 0.$$

26. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$

解: (1)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 5r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix} \underset{r_2 \times (-1)}{\overset{r_3 - 2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \div -2}{\overset{r_2 - r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - r_1 - 2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -4 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \leftrightarrow r_2}{\overset{r_3 \div 14}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 + 5r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

27. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解: 记该方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 方程组有 4 个未知量, $n-r=4-3=1$, 故其对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个向量.

由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 知 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3$ 为对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, $(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3)$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个向量, 所以可以取

$$(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系. 故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为:

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ (c\in\mathbb{R}).$$

28. 设有向量组 A: $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, 及向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix}$, 问 α,β 为何值时

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 A 线性表示, 且表示式惟一;

(3) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解: (这个题目其实是重要题型 “带参量的线性方程组” 的另一种出现方式.)

设

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b},$$

即

$$\begin{cases}\alpha x_1-2x_2-x_3=1,\\2x_1+x_2+x_3=\beta,\\10x_1+5x_2+4x_3=-1.\end{cases}\tag{4.16}$$

往下讨论方程组 (4.16) 的解即可. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\alpha&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-2c_2}\begin{vmatrix}\alpha+4&-2&-1\\0&1&1\\0&5&4\end{vmatrix}=-(\alpha+4),$$

所以 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 即 $\alpha\neq-4$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 A 线性表示, 且表示式惟一.

当 $\alpha=-4$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-4&-2&-1&1\\2&1&1&\beta\\10&5&4&-1\end{array}\right)\underset{r_3-5r_2}{\overset{r_1+2r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:c}0&0&1&1+2\beta\\2&1&1&\beta\\0&0&-1&-1-5\beta\end{array}\right)\underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{(r_3-r_1)\div(-3)}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&\beta\\0&0&1&1+2\beta\\0&0&0&\beta\end{array}\right),$$

所以, 当 $\alpha=-4$ 且 $\beta\neq0$ 时, 方程组 (4.16) 无解, 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

当 $\alpha=-4$ 且 $\beta=0$ 时, 方程组 (4.16) 有解, 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&\beta\\0&0&1&1+2\beta\\0&0&0&\beta\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\overset{r_1-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得方程组 (4.16) 的同解方程组及通解为

$$\begin{cases}x_1=x_1,\\x_2=-2x_1-1,\\x_3=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=c,\\x_2=-2c-1,\\x_3=1.\end{cases}$$

即, 当 $\alpha=-4$ 且 $\beta=0$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 其一般表示式为

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(2c+1)\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\quad(c\in\mathbb{R}).$$

29. 设

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},$$

证明三直线

$$\begin{cases}l_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0,\\l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\l_3:\ a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}\qquad(a_i^2+b_i^2\neq0,\ i=1,\ 2,\ 3)$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

证明: 三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}\qquad(a_i^2+b_i^2\neq0,\ i=1,\ 2,\ 3)\tag{4.17}$$

有惟一解. 记方程组 (4.17) 为

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}.\tag{4.18}$$

方程组 (4.18) 有惟一解的充要条件是

$$R(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{c})=2.\tag{4.19}$$

注意到 $R(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{c})=R(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$, (因为 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{c})$ 与 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ 是列等价的.) 所以 (4.19) 即为

$$R(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=2.$$

即向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

30. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4)$, 其中 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: 方法一. 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为

$$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3+\boldsymbol{a}_4x_4=\boldsymbol{b}.$$

代入 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$, 整理得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{a}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{a}_3+(x_4-1)\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}.$$

又 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

方程组 (4.20) 等价于

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

得方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

方法二. 由题设知 $R(\boldsymbol{A}) = 3$, $n - r = 4 - 3 = 1$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含一个向量. 由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0},$$

可以取 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

再由

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

知 $(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解. 所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

方法三. 记矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$. 则

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{PB},$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{P\beta}.$$

则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 为

$$\boldsymbol{PBx} = \boldsymbol{P\beta}, \quad 即 \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Bx} - \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}.$$

注意 $\boldsymbol{P}$ 是 4×3 矩阵, 且 $R(\boldsymbol{P})=3$, 则方程组 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 所以

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta}\equiv\boldsymbol{0}.$$

解方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

得通解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

31. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

证明: (1) 假设 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关. 而由基础解系的定义知 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是线性无关的, 则 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可以由 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 这与 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾. 所以假设不成立. 即 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 易知向量组 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 等价. 又由本题 (1) 的结论, $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 知

$$R(\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=R(\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-r+1.$$

所以, $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

32. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解, $k_1,\cdots,k_s$ 为实数, 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解.

证明: 由于 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解. 故有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{b}$, $(i=1,\cdots,s)$.

而

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)\\ =&k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s\\ =&\boldsymbol{b}(k_1+\cdots+k_s)=\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)$.

从而 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是方程的解.

33. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r, $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解 (由题 33 知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\quad (\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

证明: 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任一解. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关且均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1, \tag{4.21}$$

下证该向量组是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的基础解系.

由

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \underset{j=2,\cdots,n-r+1}{\overset{c_j-c_1}{\sim}} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1),$$

已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关, 得向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 线性无关, 所以向量组 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 线性无关, 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个基础解系.

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1,$$

整理得

$$\boldsymbol{x}=(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

记 $k_1=1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1}$, 则 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{n-r+1}=1$, 而且

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

34. 设

$$V_1=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\},$$
$$V_2=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=1\right\}.$$

问 V_1, V_2 是不是向量空间? 为什么?

证明: 集合 V 成为向量空间只需满足条件:

若 $\boldsymbol{\alpha}\in V, \boldsymbol{\beta}\in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$;

若 $\boldsymbol{\alpha}\in V, \lambda\in\mathbb{R}$, 则 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\in V$.

(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V, \boldsymbol{\beta}\in V$, 设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}&=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0, \\ \boldsymbol{\beta}&=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=0. \end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_n+\beta_n)^{\mathrm{T}}$, 且

$$\begin{aligned} &(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_n+\beta_n) \\ =&(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) \\ =&0. \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1. \tag{4.22}$$

对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \cdots, \lambda\alpha_n).$$

因为

$$\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_n=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\lambda\cdot 0=0.$$

故

$$\lambda \boldsymbol{\alpha} \in V_1. \tag{4.23}$$

综合 (4.22) 和 (4.23) 式, 得证 V_1 是向量空间.

(2) V_2 不是向量空间, 因为:

$$\begin{aligned}&(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)\\=&(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\\=&1+1\\=&2.\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \notin V_2.$$

35. 试证: 由 $\boldsymbol{a}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间就是 $\mathbb{R}^3$.

证明: 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, 因为

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

知 $R(\boldsymbol{A})=3$, 故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关.

由于 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 均为三维, 且秩为 3, 所以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为此三维空间的一组基, 故由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 所生成的向量空间就是 $\mathbb{R}^3$.

36. 由 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 L_1, 由 $\boldsymbol{b}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 L_2, 试证 $L_1=L_2$.

证明: 容易发现向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1+3\boldsymbol{b}_2), & \boldsymbol{a}_2&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2);\\ \boldsymbol{b}_1&=-\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{b}_2&=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2.\end{aligned}$$

又由教材 P.103 例 23 知 "等价的向量组生成的向量空间相同", 所以 $L_1=L_2$.

37. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 并把 $\boldsymbol{v}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$ 用这个基线性表示.

解: 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关, 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基.

设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1&=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3,\\ \boldsymbol{v}_2&=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3.\end{aligned}$$

要求得 k_1,k_2,k_3 和 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 即要求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_2$ 的解. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\left(\begin{array}{ccc:c:c}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-13\end{array}\right)\underset{\smile}{\overset{r_2+r_1}{}}\left(\begin{array}{ccc:c:c}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&3&2&7&-13\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{r_3\div(-2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_1-3r_3}{\overset{r_2-4r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{r_2\div 3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_1-2r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

求得方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_2$ 的解, 即

$$\begin{cases} k_1=2, \\ k_2=3, \\ k_3=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1=3, \\ \lambda_2=-3, \\ \lambda_3=-2. \end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3.$$

38. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基为

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵.

解: 由过渡矩阵的定义知, 从基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

这里 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. 因为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{r_3-r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3+r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{r_3\div 2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_1-r_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第五章　相似矩阵及二次型

1. 设 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 正交, 且 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$, 求 λ 和 $\boldsymbol{c}$.

解: 设 $\boldsymbol{c}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$, 得 $x-2z=0$, 且

$$\begin{cases}-4=\lambda+x,\\2=y,\\3=-2\lambda+z.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-2$, $\boldsymbol{c}=(-2,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

2. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$;

(2) $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

解: (1) 由施密特正交化方法, 得

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

故正交化后得:

$$(\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2,\,\boldsymbol{b}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{3}\\1&0&-\frac{2}{3}\\1&1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(2) 由施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1,\, a_3]}{[b_1,\, b_1]} b_1 - \frac{[b_2,\, a_3]}{[b_2,\, b_2]} b_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得

$$(b_1,\, b_2,\, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

3. 下列矩阵是不是正交矩阵? 并说明理由.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解: (1) 第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

4. 设 x 为 n 维列向量, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1$, 令 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$, 证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

证明: 注意到矩阵的转置运算满足 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} - 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E} - 2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}) \\ &= \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{H}. \end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称的. 又

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} &= (\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}) \\ &= \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \qquad (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1) \\ &= \boldsymbol{E}. \end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{H}$ 是正交阵.

综上得证 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是正交阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是正交阵, 故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}.$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

6. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-(\lambda+2)c_1}\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&\lambda^2-2\\5&-3-\lambda&-5\lambda-7\\-1&0&0\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\underset{r_2+5r_3}{\overset{r_1+3r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&-2&-2\\-1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. 所以 $k\boldsymbol{p}\ (k\neq0)$ 是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的全部特征值向量.

(2) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$, 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1-r_2}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2\div(-3)}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 故 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$ 是对应于 $\lambda_1=0$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_2=-1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, 故 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq0)$ 是对应于 $\lambda_2=-1$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_3=9$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\underset{r_2+r_3}{\overset{r_1+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}-5&5&0\\5&-5&0\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, 故 $k_3\boldsymbol{p}_3(k_3\neq0)$ 是对应于 $\lambda_3=9$ 的全部特征值向量.

(3) 由

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{展开 } r_1} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2(\lambda^-1) - 1\cdot(\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)^2 \\
&= (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,
\end{aligned}
$$

得

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=\lambda_4=1.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2 \quad (k_1,\ k_2 \text{ 不同时为 } 0).$$

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{p}_3+k_4\boldsymbol{p}_4 \quad (k_3,\ k_4 \text{ 不同时为 } 0).$$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

证明: 证明二者有相同的特征方程 (或特征多项式) 即可. 由性质 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}|$, 知

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\boldsymbol{E}\right| = \left|(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|.$$

得证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) < n$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

证明: 由 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) < n$, 有 $R(\boldsymbol{A}) < n$, 而

$$R(\boldsymbol{A}) < n \ \Leftrightarrow\ |\boldsymbol{A}| = 0 \ \Leftrightarrow\ |\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{E}| = 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的特征值}.$$

同理, 0 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值 0.

下证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有对应于 $\lambda = 0$ 的公共特征向量.

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A} \text{ 与 } \boldsymbol{B} \text{ 有对应于 } \lambda = 0 \text{ 的公共特征向量} \\ \Leftrightarrow\ & \text{存在非零向量 } \boldsymbol{p} \text{ 同时满足 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = 0\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{p} = 0\boldsymbol{p} \\ \Leftrightarrow\ & \text{方程组 } \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases} \text{ 有非零解} \\ \Leftrightarrow\ & \text{方程组 } \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ 有非零解} \end{aligned}$$

而

$$R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) < n.$$

综上知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

9. 设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

证明: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ 是 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 的特征值[1]. 则存在非零向量 $\boldsymbol{p}$ 使

$$(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p}.$$

又由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 代入上式得

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}.$$

而特征向量 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 所以只能有

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得 $\lambda = 1$ 或 2.

得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0.$$

所以

$$|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0,$$

则 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

但是这样只是说明了 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否还有别的特征值没有得到证明, 这就不能下结论说 "$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2".

[1] 见 P.120 **例** 8 的推广结论.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=-1$, 证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明: 即需证明 $\lambda=-1$ 满足特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$, 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$. 因为

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| &= \left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right| && (\boldsymbol{A}\text{ 为正交阵})\\
&= \left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{A}|\\
&= -\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right| && (|\boldsymbol{A}|=-1)\\
&= -\left|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right|\\
&= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,
\end{aligned}$$

所以 $2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$, 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$. 得证 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

11. 设 $\lambda\neq 0$ 是 m 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 的特征值, 证明 λ 也是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

证明: 设 $\boldsymbol{p}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 的对应于 λ 的特征向量, 则

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}. \tag{5.1}$$

上式两边同时左乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{B}\lambda\boldsymbol{p}$, 即

$$(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{Bp})=\lambda(\boldsymbol{Bp}).$$

下面证明 $\boldsymbol{Bp}$ 是非零的. 因为, 假如 $\boldsymbol{Bp}=\boldsymbol{0}$, 则 (5.1) 式中左边 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bp})=\boldsymbol{0}$; 但是 $\lambda\neq 0$, 且特征向量 $\boldsymbol{p}$ 是非零向量, 从而 $\lambda\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$. 假设不成立.

得证 λ 也是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

注意: 特征向量是非零的.

12. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3, 求 $\left|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}\right|$.

解: (模仿 P.120 **例** 9 解题.) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 记 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$, 则 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. 又

$$\varphi(1)=3,\quad \varphi(2)=2,\quad \varphi(3)=3,$$

知 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 3, 2, 3, 所以

$$\left|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}\right|=3\times 2\times 3=18.$$

12. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, -3, 求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解: 因 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+3\lambda+2$.

所以 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为

$$\varphi(1)=-1,\quad \varphi(2)=5,\quad \varphi(-3)=-5,$$

于是

$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=(-1)\cdot 5\cdot(-5)=25.$$

14. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明: 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{BA},$$

则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化, 求 x.

解: 解题依据: **定理** 4 (P.123), “n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量”.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=&\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 3 & 1-\lambda & x\\ 4 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}\\ =&(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-6),\end{aligned}$$

得 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

要使 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化, 则需 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

单根特征值对应的线性无关的特征向量有且仅有 1 个, 所以, 要使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化, 需重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应有 2 个线性无关的特征向量, 即方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 2 个线性无关的解. 由 P.97 **定理** 7, 则要求

$$n-R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2,\quad \text{即}\quad R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1.$$

由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & x\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & x-3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得

$$x=3.$$

因此, 当 $x=3$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化.

16. 已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 a, b 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能不能相似对角化? 并说明理由.

解: (1) 设特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值为 λ, 则 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$, 即

$$\boldsymbol{Ap}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2+a\\ 1+b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},$$

得

$$\lambda=-1,\quad a=-3,\quad b=0.$$

(2) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3,$$

得

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$$

要使 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能够对角化, 需使重根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应 3 个线性无关的特征向量, 即要求 3 元齐次方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关解的个数为 $n-r=3-R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=3$.

而这里 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$, 即 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant 1$, $n-r=3-R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant 2$, 所以, 方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关解的个数不可能为 3. 得证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解: (一般的解法) 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & 2\\ 0 & -3-\lambda & 4\\ 0 & 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=-5$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,\,0,\,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 2\\ 0 & -8 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2=5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=(2,\,1,\,2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3=-5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,\,-2,\,1)^{\mathrm{T}}$.

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,\,5,\,-5)$, 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3)=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(1,\,5,\,-5)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5^{100} & 0\\ 0 & 0 & 5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 5^{100} & 5^{100}\\ 0 & 5^{100} & -2\cdot 5^{100}\\ 0 & 2\cdot 5^{100} & 5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5^{100}-1\\ 0 & 5^{100} & 0\\ 0 & 0 & 5^{100}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

另解. (一个碰巧的解法) 由

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 24\\ 0 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & (a+c)d \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

若 $d = c - a$, 则

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2-a^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{pmatrix} a^n & 0 & c^n-a^n \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 & c^{n-1}-a^{n-1} \\ 0 & b^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25^{50}-1 \\ 0 & 25^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 25^{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

注 这个题型很重要. 解此类型的题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^5$.

解法一 注意到

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,-1),$$

则

$$\boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,-1)\cdots\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,-1).$$

而

$$(1,-1,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(-3)^4\cdot(1,-1,-1) = (-3)^4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,-1) = 81\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

解法二 由

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{A},$$

可知

$$A^5 = (-3)^4 A = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

再看一个题目.

已知 $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 A^{2006}.

解: 注意到 $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\,1,\,1)$, 则

$$\begin{aligned} A^{2006} &= \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\,1,\,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\,1,\,1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\,1,\,1)}_{2006\text{ 个 }A} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\underbrace{(1,\,1,\,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\,1,\,1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{2005\text{ 个 }(a+b+c)\text{ 相乘}}(1,\,1,\,1) \\ &= (a+b+c)^{2005}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

18. 在某国, 每年有比例为 p 的农村居民移居城镇, 有比例为 q 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n $(x_n + y_n = 1)$.

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

解: 由题设得

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-p)x_n + qy_n, \\ y_{n+1} = px_n + (1-q)y_n. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(2) 由递推关系式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

代入 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

下求 $\boldsymbol{A}^n$. 由

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right| = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\big(\lambda-(1-p-q)\big),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1-p-q$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1=1$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\binom{q}{p}$.

当 $\lambda_2=1-p-q$ 时, 解方程 $\big(\boldsymbol{A}-(1-p-q)\boldsymbol{E}\big)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-(1-p-q)\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2=1-p-q$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\binom{-1}{1}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1, 1-p-q)$. 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1, 1-p-q)\,\boldsymbol{P}^{-1}$, 得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q-(q-p)(1-p-q)^n \\ 2p+(q-p)(1-p-q)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

19. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称矩阵化为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解: (1) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 $|\boldsymbol{A}|$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

得正交阵 $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \boldsymbol{P} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化, 取 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1$,

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1]}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}.$$

再单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=10$ 时, 由

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

得正交阵

$$(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}.$$

20. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $5,-4,y$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 从而 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|=0$, $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=0$. 对 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=0$, 因

$$|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-9&0&9\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-4&x+4&-2\\0&0&9\end{vmatrix}=9(x-4),$$

得 $x=4$. 下求 y.

由性质 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=5\times(-4)\times y$, 又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-5&0&5\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix}-3&-2&-4\\-4&4&-2\\0&0&5\end{vmatrix}=-100,$$

得 $y=5$.

下求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得一组正交的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\,-2,\,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\big(2,\,1,\,-\frac{5}{2}\big)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\,-2,\,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=\big(\frac{4}{3\sqrt{5}},\,\frac{2}{3\sqrt{5}},\,-\frac{\sqrt{5}}{3}\big)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_3=-4$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(2,\,1,\,2)^{\mathrm{T}}$, 单位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(2,\,1,\,2)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{3}&-\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(5,-4,5).$$

注意 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_2$ 的排列顺序, 要与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的对角元 5, -4, 5 相对应.

满足条件的正交矩阵不是唯一的. 比如解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 构造一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(1,\,-4,\,1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,\,-4,\,1)^{\mathrm{T}}.$$

最后可得满足条件的正交矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

另解(求 x, y). 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 5, -4, y 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 得

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+x+1,\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|.\end{cases}\tag{5.2}$$

又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-5&0&5\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix}-3&-2&-4\\-4&x&-2\\0&0&5\end{vmatrix}=-15x-40,$$

代入 (5.2) 式得

$$\begin{cases}1+y=2+x,\\-20y=-15x-40.\end{cases}\implies\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$$

21. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=1$; 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3)$, 则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$, 所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

其中

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hdashline 0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\overset{c_2-c_1}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\\\hdashline 0&-2&1\\2&-4&1\\2&-4&0\end{pmatrix}\overset{c_3-c_2}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\\\hdashline 0&-2&3\\2&-4&5\\2&-4&4\end{pmatrix}\overset{c_1-c_3}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\\hdashline -3&-2&3\\-3&-4&5\\-2&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline -2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}.$$

22. 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(x,\,y,\,z)^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 由 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$, 知 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 两两正交. 则

$$\begin{cases}x+2y+2z=0,\\2x+y-2z=0.\end{cases}\tag{5.3}$$

由系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&2\\3&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix},$$

知方程组 (5.3) 的通解为
$$(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}} = k(-2,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}}.$$
可取
$$\boldsymbol{p}_3 = (-2,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}},$$
因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 必有正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1,\ -1,\ 0).$$
前面已经求得 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 正交, 再单位化, 即得
$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$
所以
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(1,\ -1,\ 0)\,\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$. 由定理 6, $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交. 设 $(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交, 则
$$x + y + z = 0.$$
解方程得基础解系为
$$(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},\ (-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}.$$
所以可取
$$\boldsymbol{p}_2 = (-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_3 = (-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}.$$
2° 下求矩阵 $\boldsymbol{A}$. 由
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = (6\boldsymbol{p}_1, 3\boldsymbol{p}_2, 3\boldsymbol{p}_3),$$
得
$$\boldsymbol{A} = (6\boldsymbol{p}_1, 3\boldsymbol{p}_2, 3\boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$
由
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 6 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_3 - c_2}{\overset{c_1 + c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{c_2 \times (-1)}{\overset{(c_1 - c_3) \div 3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
得
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(6,\ 3,\ 3)\,(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

24. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $a_1 \neq 0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$,

(1) 证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解: (1) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 相似, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

由习题三 19 题, 知 $R(\boldsymbol{A})=1$, 从而 $R(\boldsymbol{\Lambda})=1$, 于是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元只有一个非零, 即 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值.

(2) 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 的对角线元素之和为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$; 又由特征值性质: $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值之和为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, 已证 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值, 所以剩下的那个特征值只能是 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

已知 $a_1 \neq 0$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$, 得证 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值 (且是惟一的).

下求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(a) 当 $\lambda=0$ ($n-1$ 重) 时, 求解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{r_1 \div a_1}{\sim}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \underset{i=2,3,\cdots}{\overset{r_i - a_ir_1}{\sim}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\lambda=0$ ($n-1$ 重) 对应的 $n-1$ 个线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

(b) 当 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 时, 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\sum_{i=1}^{n} a_i^2=\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\boldsymbol{a},$$

可见 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 对应的特征向量.

综上, 得到 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

25. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8$.

解: (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-4=(\lambda-5)(\lambda-1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$.

$\lambda_1=5$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_2=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$.

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\,\mathrm{diag}(5,1)$, 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$, $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(5,1)$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9&=\boldsymbol{P\Lambda}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}-5\boldsymbol{P\Lambda}^9\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\left(\begin{pmatrix}5^{10}&\\&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5^{10}&\\&5\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\\&4\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注意这类题型只需要把矩阵进行一般的对角化就可以了, 不一定非得求正交矩阵使之对角化. 考虑到正交矩阵的逆矩阵易求, 也可以构造正交矩阵解题. 如下面的解法.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|&=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2-\lambda&2\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}\\&\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1-\lambda&0\\0&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1).\end{aligned}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=5$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\underset{r_3+r_1+r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}-4&4&0\\1&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

$\lambda_2=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\underset{r_2-r_1}{\overset{r_3\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$;

$\lambda_3=-1$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

这里 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是对称矩阵的不同特征值对应的特征向量, 它们已经正交, 再分别单位化, 得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)\operatorname{diag}(5,1,-1)$, 记 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(5,1,-1)$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8&=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^{10}-6\boldsymbol{\Lambda}^9+5\boldsymbol{\Lambda}^8)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&2\sqrt6\\0&0&2\sqrt6\\0&0&-4\sqrt6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-4\\2&2&-4\\-4&-4&8\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

26. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

解: (1)

$$f=(x,\,y,\,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

(2)

$$f=(x,\,y,\,z)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

(3)

$$f=(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

27. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$;　　(2) $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解: 对称地调整 a_{ij} 与 a_{ji} 的值, 使两者的和不变, 且 $a_{ij}=a_{ji}$ 即可:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$.

28. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解: (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$. 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

且有

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

(2) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$. 由特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\0&-1&1-\lambda&1\\-1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=\!=\!=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\1&-1&1-\lambda&1\\1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-\lambda&-1&1\\0&-2&1-\lambda&2\\0&-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-2&1-\lambda&2\\-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1-\lambda r_3}{\underset{r_2-2r_3}{=\!=\!=\!=}}(1-\lambda)\begin{vmatrix}0&-1-\lambda&\lambda^2-2\lambda+1\\0&-1-\lambda&-2+2\lambda\\-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{\underset{(r_4+r_2)\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{(r_3+r_4)\div 2}{\underset{r_2-2r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&-1&-2\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&-1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

取特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\right)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_2=3$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0&-1\\1&-2&-1&0\\0&-1&-2&1\\-1&0&1&-2\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\underset{(r_4+r_2)\div(-2)}{\sim}}\begin{pmatrix}0&-3&-2&-1\\1&-2&-1&0\\0&-1&-2&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1+3r_4}{\underset{r_3+r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}0&0&-2&2\\1&-2&-1&0\\0&0&-2&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

可得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}\underset{r_3+r_1}{\overset{r_4+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得两个正交的特征向量: $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_4=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2},0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_4=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)^{\mathrm{T}}$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac12&\frac12&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac12&-\frac12&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac12&-\frac12&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

29. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解: 把等式左边的二次型化为标准型即可. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}.$$

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-5\\-2&-5&5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-5\\0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda&4&-2\\2&10-\lambda&-5\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)(11-\lambda),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=11$. 下求它们对应的特征向量.

当 $\lambda_1=0$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt2}(0,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=2$ 时, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&3&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&3&-5\\0&-2&-2\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(4,\,-1,\,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{3\sqrt2}(4,\,-1,\,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 11$ 时, 由

$$\boldsymbol{A} - 11\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 0 & -11 & -11 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_2 + 5r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = 11$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{3}(1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$.

从而得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

由正交变换 $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}(u, v, w)^{\mathrm{T}}$, 二次型 $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz$ 化为标准型

$$2v^2 + 11w^2.$$

即二次曲面的标准方程为

$$2v^2 + 11w^2 = 1.$$

30 . 证明: 二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

证明: 取正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 则

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又正交变换保持向量的长度不变, 即

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|^2,$$

所以, 当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时, 有 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2 = 1$.

记 $\lambda_i = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 则

$$f = (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2) \leqslant (\lambda_i y_1^2 + \lambda_i y_2^2 + \cdots + \lambda_i y_n^2) = \lambda_i(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_i.$$

而且, 当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 时, $f = \lambda_i$. 故得证

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} f = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

31 . 用配方法化下列二次型成规范型, 并写出所用变换的矩阵:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;

解: (1)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}\,(x_2 + x_3), \\ y_3 = x_3, \end{cases} \qquad \text{即} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 3y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

把 f 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_2^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases}$$

把 f 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + 2x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 + x_3, \\ y_3 = \sqrt{2}\,x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + \sqrt{2}\,y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \end{cases}$$

把 f 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

32. 设

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型, 求 a.

解: 该二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

由正定的充要条件, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

即

$$\begin{cases} 1-a^2>0, \\ -a\,(5a+4)>0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{5}<a<0.$$

33. 判定下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.

解: (1) f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{a}_{11}=-2<0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=11>0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-38<0,$$

根据定理 11 知 f 为负定.

(2) f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{a}_{11}=1>0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2>0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}=6>0,$$

根据定理 11 知 f 为正定.

34. 证明对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

证明: (充分性) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$, 任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 则

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}.$$

(如果 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{U}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 矛盾.)

对这个任取的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})=\big[\boldsymbol{U}\boldsymbol{x},\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\big]=\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|^2>0.$$

从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的.

(必要性) 设对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的. 因 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵, 则存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{A}$ 对角化, 即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 而 $\boldsymbol{A}$ 为正定的, 所以 $\lambda_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 记对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}),$$

则

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^2=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})=\boldsymbol{\Lambda}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\big(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\big)\big(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\big)^{\mathrm{T}},$$

记 $\boldsymbol{U}=\big(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\big)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{U}$ 可逆, 而且得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.