高等数学 (上) · 复习概要

黄正华[*]

2012 年 12 月 29 日

目录

[*]Email: huangzh@whu.edu.cn

0 考点提要

0.1 考点

(1) 微分中值定理.

(2) 定积分的几何应用 (弧长, 体积); 物理应用 (做功, 压力).

(3) 函数的极值、单调性、凹凸性、拐点讨论.

(4) 分段函数的连续性; 分段函数求导; 分段函数的定积分.

(5) 间断点类型讨论.

(6) 参数方程函数的求导 (特别是二阶导数); 隐函数的求导; 幂指函数的求导.

(7) 微分方程. $y''+py'+qy=0$, $y''=f(y,y')$, $y'+P(x)y=Q(x)$ 类型.

(8) 分部积分法.

(9) 反常积分.

0.2 弱点

(1) 泰勒公式, 泰勒中值定理.
(2) 积分中值定理.
(3) 介值定理, 零点定理.
(4) 不等式的证明.
(5) 极限存在的两个准则.
(6) 无穷小的比较.

1 函数

主要问题: 什么是函数? 常见的函数表达式类型?
常见考点: 求复合函数或复合函数的反求.

1.1 什么是函数

函数即 “对应关系” 本身. 对应关系是抽象的, 我们看到的解析表达式 $y=f(x)$ 正是为了表述、体现那个看不到摸不着的关系而给出的具象.

函数的表达方式有多种: 图像法, 表格法, 公式法. 有的函数可以用公式法表示, 但不能用图像法表示 (例如狄利克雷函数); 有点函数只能用图像法或表格法表示, 但是得不到其公式法表示. 事实上现实世界里变量之间的关系一般很难精确地满足某个解析式, 比如股票价格、房屋价格很难找到一个具体的函数, 也不可能找得到. 很多科研工作就是在试图找到一个尽可能接近真实的解析式.

教材中的函数, 都是用公式法表示的. 要特别重视公式法表示函数时的不同表现形式, 比如幂指函数、分段函数、用参数方程确定的函数、隐函数、积分上限的函数. 这些新的函数形式在整个高等数学中极为重要和常见, 微积分学的很多基本问题, 例如极限、连续性、求导、积分等, 都会特别关注对这几类函数的相关问题的讨论.

1.2 常见的函数表达式类型

- 分段式函数. (求极限、连续性讨论、求导、积分)
- 幂指函数: $u(x)^{v(x)}$. (求极限、求导)
- 积分上限的函数: $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. (求导、求极限)
- 隐函数.
- 参数方程确定的函数.

把上述几类函数进行组合, 可以得到形式更为新颖、结构更为复杂的函数.

2 极限

主要问题: 什么是无穷小?

常见考点: 等价无穷小; 重要极限; 1^∞ 型极限.

2.1 无穷小

$\lim\limits_{x\to *} f(x)=0$, 则 $f(x)$ 为 $x\to *$ 时的无穷小. (这里 $x\to *$ 代表趋于常数、无穷大、单侧逼近等各种情形.)

(1) 无穷小是一个函数.

(2) 必须指明条件 "$x\to *$". (比如 $\sin x$ 在 $x\to 0$ 时为无穷小, 而 $x\to\infty$ 时什么也不是.)

(3) 等价无穷小 (同阶无穷小)、高阶无穷小 (低阶无穷小) 讲的是函数趋于 0 的速度的比较. (比如 $x\to 0$ 时, x^3 奔向 0 的速度比 x^2 要快, 故 $x\to 0$ 时, x^3 是较 x^2 高阶的无穷小.)

(4) 多项式函数中, 次数最低的项决定无穷小的阶数, 或者说决定其速度的数量级. (例如 $x\to 0$ 时, $3x^3+4x^2+2x$ 与 x 是同阶无穷小.) 无穷大的情形则相反, 次数最高的项起决定作用.

例 1 口算下列极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2x}{7x^3+1000x^2+x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x^3+4x^2+2x}{7x^3+1000x^2+x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{10}(3n-2)^{20}}{(5n+4)^{30}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n-1}}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

例 2 设 $f(x)=(\cos x-4)\sin x+3x$,

(1) 求 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}(x^2)}$;

(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是关于 x 的几阶无穷小?

2.2 常见的等价无穷小

$x\to 0$ 时,

$$x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

$$(1+x)^a-1\sim ax.$$

可以用洛必达法则验证上述等价无穷小, 或者由泰勒展开式验证.

例如 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$, 可见 $x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, 即 $\sin x \sim x$.

又如 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$, 当 $x \to 0$ 时, $\cos x - 1$ 为无穷小, 且 $\cos x - 1 = -\frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)$, 即 $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2!}x^2$, 或者 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

2.3 1^∞

重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$ 是 1^∞ 型极限的第一个例子. 其一般形式是

$$\lim_{x\to *}\big(1+\alpha(x)\big)^{\beta(x)} = \exp\{\lim_{x\to *}\alpha(x)\beta(x)\}, \tag{1}$$

其中 $x \to *$ 时, $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to \infty$.

注意这是幂指函数求极限.

幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 这一函数形式在高等数学的学习中非常普遍, 关于它的求极限、求导等问题, 要特别重视.

$u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$, 可见它本质上是一个指数函数.

对于一般的幂指函数有

$$\lim_{x\to *}u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to *}\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \exp\left\{\lim_{x\to *}\big(v(x)\ln u(x)\big)\right\}.$$

同样地

$$\lim_{x\to *}\big(1+\alpha(x)\big)^{\beta(x)} = \exp\left\{\lim_{x\to *}\Big(\beta(x)\ln\big(1+\alpha(x)\big)\Big)\right\},$$

注意到 $\alpha(x) \to 0$ 时, $\ln\big(1+\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$, 故有 (1) 式成立.

记住 (1) 式, 有助于我们迅速地解决 1^∞ 型极限问题.

例 3 口算下列极限:

$$\lim_{x\to\infty}\big(\frac{1+x}{x}\big)^{2x}, \quad \lim_{x\to\infty}\big(1-\frac{1}{x}\big)^{kx}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}, \quad \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}.$$

例 4 (考研 2011) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$____________.

解 为 1^∞ 型极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right\} && \text{(由 (1) 式)}\\
&= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{2}\right\} && \text{(洛必达法则)}\\
&= \exp\left\{\frac{\ln 2}{2}\right\} = \sqrt{2}. && \blacksquare
\end{aligned}
$$

例 5 (考研 2012) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}} =$______________.

解 为 1^∞ 型极限.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+(\tan x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}\\
&= \exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}\right\} && \text{(由 (1) 式)}\\
&= \exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos}\cdot\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}\right\}\\
&= \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}. && \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.4 重要性质

有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

例 6 求下列极限:

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+2}.
$$

3 连续

主要问题: 什么是连续与间断?
常见考点: 分段函数连续性; 指出间断点的类型; 零点定理, 介值定理.

3.1 连续与间断

说一个函数连续, 就是其曲线连续、不断开.

- 判断连续或间断, 都只需要抓住一个表达式:

$$
\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).
$$

- 上述定义式由三部分组成, 每一部分的不成立都导致间断:
  (i) $f(x_0)$ 不成立, 即函数在 x_0 无定义;
  (ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不成立, 即函数在 x_0 无极限;
  (iii) 等号 "=" 不成立.
- 第一类间断是连续的 "近亲", 是可修复的间断; 第二类间断则不然, 其间断的 "程度" 更为激烈.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 3x+a, & x>0.\end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 求 a.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0,\\ x^2+a, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 求 a.

例 9 设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(0)=0$.

(1) a 为何值时, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(2) 讨论 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微性; 讨论导函数 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

例 10 设函数 $f(x)$, $F(x)$ 满足 $|f(x)|\leqslant|F(x)|$, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $F(0)=0$. 试证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3.2 介值定理

零点定理、介值定理, 一定要结合几何意义去理解.

4 导数与微分

主要问题: 什么是可导? 可导与连续的关系?

常见考点: 隐函数求导; 参数方程函数的求导; 分段函数求导; 积分上限函数求导.

难点: 参数方程函数的求二阶导数; 高阶导数.

4.1 关于导数

- 定义式: $f'(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 通俗解释: 可导函数曲线是光滑的; “尖点” 处不可导.
- 与连续的关系: 可导必定连续; 连续不一定可导. (比如函数在尖点处连续但不可导.)

例 11 单项选择:

1) 函数 $f(x)=|\sin x|$ 在点 $x=0$ 的导数是 ( )

(A) 不存在 (B) 1 (C) 0 (D) -1

2) 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 ( )

(A) 不连续 (B) 可导 (C) 连续但不可导 (D) 导数为无穷大

4.2 分段函数的求导

分段点的导数要用定义求.

例 12 1) 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$. 2) 已知 $f(x)=x\,|x|$, 求 $f'(x)$.

例 13 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1, \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 求 a, b.

4.3 幂指函数的求导

幂指函数本质上是复合函数: $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$. (这里 $u(x)>0$.)

例 14 求下列函数的导数:

(1) x^x; (2) x^{a^x}; (3) a^{x^x}; $(a>0)$

4.4 隐函数求导

隐函数求导实质就是复合函数求导.

例 15 求下列隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$; (2) $\cos(x^2+y)=x$; (3) $y-x\mathrm{e}^y=\ln 3$.

例 16 已知 $u=\mathrm{e}^{xy}$, 其中 $y=f(x)$ 由方程 $\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\cos t\,\mathrm{d}t$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

例 17 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ 确定, 求 $\mathrm{d}y$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4.5 参数方程函数的求导

其实质也是复合函数的求导. 要特别注意求二阶导数.

例 18 设 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=3t^2+2t+3, & (2)\\ y=1+\mathrm{e}^y\sin t & (3)\end{cases}$$

所确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解 先求一阶导 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$. 对 (3) 式两边关于 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\sin t+\mathrm{e}^y\cos t,$$

整理得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{2-y}$. 又 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2$, 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}. \tag{4}$$

记 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$, 两边取对数得

$$\ln y'=y+\ln\cos t-\ln(2-y)-\ln(6t+2),$$

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y'}\cdot y''&=y'+\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2-y}\cdot(-1)\cdot y'+\frac{1}{6t+2}\cdot 6\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\ &=y'+\Big(-\tan x-\frac{6}{6t+2}\Big)\cdot\frac{1}{6t+2}+\frac{1}{2-y}\cdot y'. && \left(\tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\tfrac{1}{6t+2}\right)\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时, $y=1+\mathrm{e}^y\sin 0$, 得 $y=1$. 代入 (4) 得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}}{2},$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{3}{4}\mathrm{e}.$$

■

例 19 设 $\begin{cases} x=\displaystyle\int_1^{t^2}u\ln u\,\mathrm{d}u,\\ y=\displaystyle\int_{t^2}^{1}u^2\ln u\,\mathrm{d}u,\end{cases}$ $(t>1)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

5 导数的应用

主要问题: 微分中值定理如何理解? 极值与最值的区别?

常见考点: 恒等式或不等式的证明; 求函数的极值或最值, 单调性、凹凸性判别, 拐点.

极值是局部的; 最值是全局的. 驻点是可能的极值点; 极值点不一定是驻点.

6 积分

主要问题: 定积分的几何意义? 积分上限的函数如何理解? 换元积分法和分部积分法的实质?

常见考点: 分段函数的定积分; 积分中值定理.

6.1 换元积分法 (第一类换元法)

换元积分法 (第一类换元法) 用来处理形如 $\displaystyle\int f\big(\varphi(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分. 这类积分的特点是: 被积表达式一般是两个函数的乘积, 其中一个为复合函数, 且其内函数 $\varphi(x)$ 的导数往往是剩下的那个函数 $g(x)$, 即 $\varphi'(x)=g(x)$, 或者说 $\mathrm{d}\big(\varphi(x)\big)=g(x)\,\mathrm{d}x$. 从而

$$\int f\big(\varphi(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x=\int f\big(\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}\big(\varphi(x)\big),$$

再把 $\varphi(x)$ 视为一个整体变量 u, 做形如 $\displaystyle\int f(u)\,\mathrm{d}u$ 的积分.

例 20 计算下列各题:

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x},\quad \int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$$

6.2 分部积分法

分部积分法所处理的积分, 其被积表达式也一般是两个函数的乘积, 这两个函数是不同类型的初等函数, 或者说通常是幂、指、对、三角、反三角等函数中的某两个. 分部积分法的关键在于其中暗含了一次求导, 使被积表达式中的一个函数得以 “消失” 或简化.

例如积分 $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, 我们选择把 e^x 先 “移到” 符号 d 之后, 得

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x^2\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

后移的函数 x^2 被求了导. 继续这个想法, 其次数进一步降低, 最终成为一个常数. 即

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x^2\mathrm{e}^x - 2\big(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\big).$$

例 21 计算下列各题:

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x,\quad \int \ln x\,\mathrm{d}x,\quad \int x\ln x\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

6.3 积分上限函数的求导

积分上限函数 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 的求导公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = f(x).$$

积分上限复合函数的求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(x)\,\mathrm{d}x = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x).$$

例 22 计算下列各题:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x tf(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{x^2} f(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4},$$

例 23 (1) 设 $\int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t = x^3$, 求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (2) 设 $\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = 4x^4 - 2x^2$, 求 $f(x)$.

6.4 分段函数的定积分

例 24 计算下列定积分: (1) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 13 - x^2, & x < 2, \\ 1 + x^2, & x \geqslant 2. \end{cases}$

6.5 积分中值定理

例 25 试证明: 若 $f(x)$, $g(x)$ 都是可微函数, 且当 $x \geqslant a$ 时, $|f'(x)| \leqslant g'(x)$, 则当 $x \geqslant a$ 时, $|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a)$.

证明 由 $x \geqslant a$ 时 $|f'(x)| \leqslant g'(x)$ 有

$$\int_a^x |f'(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^x g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

又

$$\left|\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^x |f'(x)| \,\mathrm{d}x,$$

且

$$\left|\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\big[f(x)\big]_a^x\right| = |f(x)-f(a)|\,,$$

$$\int_a^x g'(x)\,\mathrm{d}x = \big[g(x)\big]_a^x = g(x)-g(a),$$

得

$$|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a).$$

■

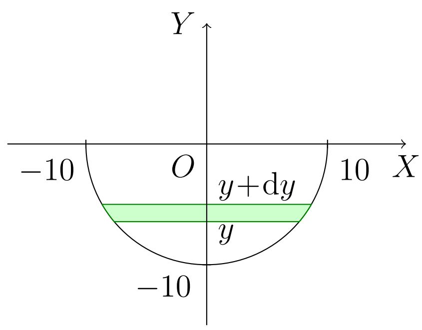
7 定积分的应用

主要问题: 什么是元素法?

常见考点: 求面积; 弧长; 旋转体体积; 做功问题.

例 26 求曲线 $\begin{cases} x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u, \\ y = \displaystyle\int_1^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \end{cases}$ 自 $t=1$ 至 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 一段弧的长度.

例 27 设有半径为 10 的半球形水池, 试求将池内水全部抽出池外所耗费的功.



8 反常积分

积分 $\int_0^a \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, 当 $p<1$ 时收敛; 当 $p \geqslant 1$ 时发散. 其中 a 为任意正数.

积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, 当 $p>1$ 时收敛; 当 $p \leqslant 1$ 时发散. 其中 a 为任意正数.

9 常微分方程

9.1 二阶常系数齐次线性微分方程

求解

$$y''+py'+qy=0, \qquad (p,\ q \text{ 是常数})$$

对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$, 得特征根 r_1, r_2.

(1) 若为两相异实根 $r_1 \neq r_2$, 则通解 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$.

(2) 若为两相同实根 $r_1=r_2=r$, 则通解 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$.

(3) 若为复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$, 则通解 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

9.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

非齐次方程

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (p,\ q \text{ 是常数}) \tag{5}$$

的通解, 是该方程的一个特解再加上对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解.

(1) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$, 这里 λ 为常数, $P_m(x)$ 为 m 次多项式. 则非齐次方程 (5) 的一个特解为

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

其中 k 是 λ 为特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根之重数, $k=0,1,2$. $Q_m(x)$ 是 m 次多项式, 其系数待定.

(2) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\big(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\big)$, 这里 $P_l(x)$ 为 l 次多项式, $P_n(x)$ 为 n 次多项式. 记 $m=\max\{l,n\}$.

若 $\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的 k 重根, $k=0,1$, 则非齐次方程 (5) 的一个特解为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\big(Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x\big),$$

其中 $Q_m(x)$, $R_m(x)$ 是 m 次多项式, 其系数待定.

附录一　几个反例

A.1　函数在某一点可导, 是否存在该点的某个邻域, 使函数在该邻域内每一点都可导?

答案是否定的.

例 28 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2|\cos\frac{\pi}{x}|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 可导, 而在 $x=0$ 的任何邻域内都有不可导点.

事实上

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2|\cos\frac{\pi}{x}|}{x}=0,$$

即函数在 $x=0$ 可导.

对 $x=0$ 的任何邻域 $(-\delta,\,\delta)$, 取充分大的 n, 使 $x_n=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\in(-\delta,\,\delta)$. 下面考虑函数在点 $x_{2n}=\frac{2}{4n+1}$ 的导数. 注意到 $f(x_{2n})=0$, 有

$$\begin{aligned}
f'_-(x_{2n}) &= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_{2n}+\Delta x)-f(x_{2n})}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left(\frac{2}{4n+1}+\Delta x\right)^2\left|\cos\frac{\pi}{\frac{2}{4n+1}+\Delta x}\right|-0}{\Delta x}\\
&= \left(\frac{2}{4n+1}\right)^2\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left|\cos\frac{(4n+1)\pi}{2+(4n+1)\Delta x}\right|}{\Delta x}\\
&= \left(\frac{2}{4n+1}\right)^2\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\cos\frac{(4n+1)\pi}{2+(4n+1)\Delta x}}{\Delta x} && \left(\cos\frac{(4n+1)\pi}{2+(4n+1)\Delta x}\to 0^-\right)\\
&= \left(\frac{2}{4n+1}\right)^2\lim_{\Delta x\to 0^-}\sin\frac{(4n+1)\pi}{2+(4n+1)\Delta x}\cdot\left(-\frac{(4n+1)^2\pi}{\left(2+(4n+1)\Delta x\right)^2}\right) && (\text{洛必达法则})\\
&= -\frac{4}{(4n+1)^2}\cdot\frac{(4n+1)^2\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

类似地有 $f'_+(x_{2n})=\pi$. 故函数 $f(x)$ 在 x_{2n} 不可导.

同理可证 $f(x)$ 在 x_{2n+1} 不可导. 所以 $f(x)$ 在 $x_n=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ 均不可导.

A.2 可导的函数本身一定是连续的. 其导函数也一定连续吗?

答案是否定的.

例 29 函数

$$f(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的导函数

$$f'(x)=\begin{cases}6x\sin\frac{1}{x}-3\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 不连续, 因为极限

$$\lim_{x\to 0}\left(6x\sin\frac{1}{x}-3\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在.