《高等数学》期中考试试题◆参考解答

一、$(3\times 6$ 分) 试解下列各题:

(1) 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角满足 $\alpha+\beta=\pi$, $\cos\alpha+\cos\gamma=1$, 且 $|\boldsymbol{a}|=6$. 求向量 $\boldsymbol{a}$.

解: 由题设得$\cos\beta=-\cos\alpha$, $\cos\gamma=1-\cos\alpha$. 代入 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 得

$$2\cos^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2=1,$$

得 $\cos\alpha=0$ 或 $\dfrac{2}{3}$.

从而 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{0,0,1\}$ 或 $\{\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\}$. 则 $\boldsymbol{a}=\{0,0,6\}$ 或 $\{4,-4,2\}$.

(2) 设函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$, 求在点 $M(1,\,2,\,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\,u|_M$.

解: $\dfrac{2}{9}\{1,\,2,\,-2\}$ 或 $\dfrac{2}{9}\boldsymbol{i}+\dfrac{4}{9}\boldsymbol{j}-\dfrac{4}{9}\boldsymbol{k}$.

(3) 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+x=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 所确定, 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: 两边分别对 x, y 求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+1=\mathrm{e}^{-xy^2}\cdot y,\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{-xy^2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{-xy^2}.$$

二、(15 分) 证明函数 $f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,\,0)$ 连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

证: (1) 因为 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{|x|\cdot|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2}$, 从而 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$.

所以, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

(2) 由偏导数定义知 $f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$;

同理 $f_y(0,0)=0$. 所以, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在.

(3) 【要证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 即要证明 $\rho\to 0$ 时, $\Delta z-\big[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y\big]$ 是较 ρ 高阶的无穷小.】

函数在点 $(0,0)$ 处有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$, 所以

$$\Delta z-\big[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y\big]=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

如果考虑点 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$, 则

$$\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{\big((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\big)^3}}=\frac{(\Delta x)^3}{\sqrt{\big(2(\Delta x)^2\big)^3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

它不能随 $\rho\to 0$ 而趋于 0, 这表示 $\rho\to 0$ 时

$$\Delta z-\big[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y\big]$$

并不是较 ρ 高阶的无穷小. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、(8 分) 设 $z = f(x, y, z) = xy + xF(u)$, 其中 F 为可微函数, 且 $u = \dfrac{y}{x}$, 试证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

解: 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) + xF'(u)\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big), \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} = xy + xF(u) - yF'(u) = z - yF'(u);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + xF'(u)\cdot\frac{1}{x} = x + F'(u), \qquad y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + yF'(u).$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

四、(10 分) 求曲面 $x = u + v$, $y = ve^u$, $z = u - v$ 在 $u = v = 0$ 处的切平面方程.

解: 将曲面方程看作题中方程组确定的隐函数 $z = z(x, y)$. 下求 z'_x, z'_y. 利用全微分, 由

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y = ve^u\,\mathrm{d}u + e^u\,\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}u - \mathrm{d}v. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \frac{e^u + ve^u}{e^u - ve^u}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{e^u - ve^u}\,\mathrm{d}y.$$

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^u + ve^u}{e^u - ve^u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{e^u - ve^u}$. 则在 $u = v = 0$ 即 $x = y = z = 0$ 处, 法向量为

$$\boldsymbol{n} = \big\{z'_x,\, z'_y,\, -1\big\} = \{1,\, -2,\, -1\}.$$

故所求切平面为 $1\cdot(x-0) - 2\cdot(y-0) - 1\cdot(z-0) = 0$, 即 $x - 2y - z = 0$.

五、(10 分) 利用拉格朗日乘数法, 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $x + 2y + 2z = 18$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 下的极大值或极小值.

解: 令 $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 2z - 18)$. 由

$$\begin{cases} F_x = 2x + \lambda = 0, \\ F_y = 2y + 2\lambda = 0, \\ F_z = 2z + 2\lambda = 0, \\ F_\lambda = x + 2y + 2z - 18 = 0, \end{cases}$$

得驻点 $M(2, 4, 4)$, 且 $u(M) = 36$.

由于本问题实际上是考虑平面 $x + 2y + 2z = 18$ 在第一卦限部分内的点到原点的距离的平方, 故应有最小值, 从而有极小值. 因此函数 u 在点 $M(2, 4, 4)$ 取得极小值 $u(2, 4, 4) = 36$.

六、(10 分) 设 Ω 为曲面 $x^2 + y^2 = az$ 与 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$ 所围成的空间封闭区域, 求 Ω 的体积.

解: 联立 $x^2 + y^2 = az$ 与 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$, 得 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}:\ x^2 + y^2 \leqslant a^2$. 所以空间区域 Ω 可以表达为

$$\Omega: \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{a} \leqslant z \leqslant 2a - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ (x, y) \in D_{xy}:\ x^2 + y^2 \leqslant a^2. \end{cases}$$

则 Ω 的体积为

$$\begin{aligned}V &= \iiint_\Omega \mathrm{d}V = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z \\ &= \iint_{D_{xy}} \big(2a - \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{a}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2a^3\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a (r + \frac{r^2}{a}) r\,\mathrm{d}r \\ &= 2a^3\pi - 2\pi\big(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^3\big) = \frac{5}{6}\pi a^3.\end{aligned}$$

七、(20 分) 计算:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

(2) 计算积分 $I = \displaystyle\iiint_\Omega \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是 yOz 面上的直线 $y = z$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的曲面与平面 $z = 1$, $z = 2$ 所围成的空间区域.

解: (1) 积分区域为 $D:\ \pi - \arcsin y \leqslant x \leqslant \arcsin y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$. 这是 Y–型区域, 换为 X–型区域, 积分区域表示为 $D:\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$. 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} \sin^3 x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} \sin^3 x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

(这里使用到了常用结论 $\displaystyle\int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$. 若不记得这个结论, 采用“降次”的方法, 积分也是容易做出的.)

(2) 旋转曲面为 $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. 积分区域可表示为 $\Omega: \begin{cases} (x,y) \in D_z : x^2 + y^2 \leqslant z^2, \\ 1 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$ 所以

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}V &= \int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 e^z\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^z \frac{1}{r} \cdot r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_1^2 z e^z\,\mathrm{d}z = 2\pi\Big[z e^z - e^z\Big]_1^2 = 2\pi e^2.\end{aligned}$$

八、(9 分) 设直线 L_1 和 L_2 的方程为:

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}, \qquad L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-2}.$$

1) 证明 L_1 与 L_2 是异面直线; 2) 求与 L_1 和 L_2 都垂直相交的直线 L.

解: 1) 两直线分别过点 $P(1,-1,0)$, $Q(-1,3,4)$. 方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1 = \{1,2,-1\}$, $\boldsymbol{s}_2 = \{2,-1,-2\}$. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

知 L_1 与 L_2 是异面直线.

2) 设公垂线 L 与直线 L_1 与 L_2 的交点分别为 $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$. M, N 分别满足 L_1 与 L_2 的(参数)方程, 有

$$x_1 = t+1, \qquad y_1 = 2t-1, \qquad z_1 = -t,$$

$$x_2 = 2\lambda - 1, \qquad y_2 = -\lambda + 3, \qquad z_2 = -2\lambda + 4.$$

因此, $\overrightarrow{MN} = \{2\lambda - t - 2, -\lambda - 2t + 4, -2\lambda + t + 4\}$. 又 $\overrightarrow{MN} \perp \boldsymbol{s}_1$, $\overrightarrow{MN} \perp \boldsymbol{s}_2$, 故

$$\begin{cases} 1\cdot(2\lambda - t - 2) + 2\cdot(-\lambda - 2t + 4) + (-1)\cdot(-2\lambda + t + 4) = 0, \\ 2\cdot(2\lambda - t - 2) + (-1)\cdot(-\lambda - 2t + 4) + (-2)\cdot(-2\lambda + t + 4) = 0. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \lambda - 3t + 1 = 0, \\ 9\lambda - 2t - 16 = 0. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \lambda = 2, \\ t = 1. \end{cases}$ 故 $M(2,1,-1)$, $N(3,1,0)$, 过此两点的直线即为所求公垂线 L:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}.$$