武汉大学数学与统计学院 2012 – 2013 学年第一学期
《高等数学 J1》期末考试试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 17 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在**武汉大学试卷纸**上, 写在其他位置无效.

姓名______ 学号______

装 订 线

一、计算题(本题满分 60 分, 每小题 5 分)

1. 确定 a, b 之值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ x + b, & x > 0 \end{cases}$ 处处连续.

2. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x \sin \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$.

3. 找出函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的所有间断点, 并判断其类型.

4. 当 $x \to 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2 - 2x - 1}\ln x$ 与 $(x-1)^\alpha$ 为同阶无穷小, 求 α.

5. 设 $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, 求极限 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{f(2 - x) - 1}$.

6. 设 $g(x) = f\big(\phi^2(x) - \phi(x^2)\big)$, 其中 $f(u)$, $\phi(x)$ 都是可导函数, 求 $g'(x)$.

7. 设 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$ 均为可导函数, $y(x) = \sqrt{\phi^2(x) + \psi^2(x)}$, 求 $\mathrm{d}y$.

8. 求由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1 + t^2), \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

9. 确定函数 $f(x) = x|x - 2|$ 的凹凸性, 并求拐点.

10. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}\,\mathrm{d}x$.

11. 已知 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 试计算定积分 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

12. 求微分方程 $y'' - 7y' + 6y = 6x^2 - 2x - 1$ 的通解.

二、证明题(本题满分 16 分, 每小题 8 分)

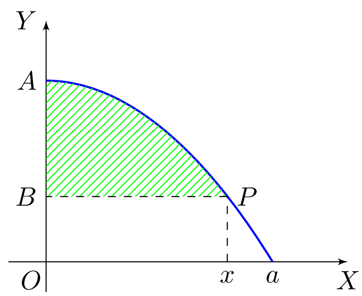
13. 设偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x (x - 2t) f(t)\,\mathrm{d}t$, 试证明 $\phi(x)$ 为偶函数.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且
$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b),$$
求证: 在 (a, b) 至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi) = 0$.

三、应用题(本题满分 24 分, 每小题 8 分)

15. 有一个上大下小的圆锥形水池, 池口直径 20 米, 深 15 米. 池内盛满了水, 求将水全部抽到池外所做的功.

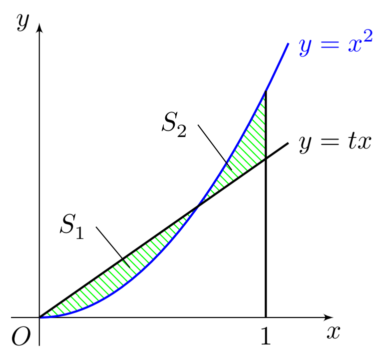
16. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上满足条件 $f(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 且 $f(0) = 1$. P 为曲线 $f(x)$ 上一点, 其横坐标为 x. 曲边三角形 PAB (如图阴影部分) 面积 $S = \dfrac{2}{3}x^3$, 试求 $f(x)$.



17. 设直线 $y = tx$ $(0 < t < 1)$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形面积为 S_1, 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2.

1) 试确定 t 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

2) 求该最小值所对应的平面图形围绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



参考答案 · 卷 (A)

1. $a=1$, $b=1$.

2. 注意到 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数, $x\to 0$ 时, $x\sin\frac{1}{x}\to 0$, 故这是 1^∞ 型极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} &= \exp\left\{\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\}\\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\right\}\\ &= \mathrm{e}^0 = 1.\end{aligned}$$

3. 其间断点为使 $\frac{x}{1-x}$ 无定义的点或使 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}=0$ 的点, 即 $x=0$ 和 $x=1$ 为函数的间断点. (1) 因 $x\to 0$ 时, $\frac{x}{1-x}\to 0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, 则 $x=0$ 为函数的第二类间断点(无穷间断点). (2) 因 $x\to 1^+$ 时, $\frac{x}{1-x}\to -\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$; 而 $x\to 1^-$ 时, $\frac{x}{1-x}\to +\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to +\infty$, 从而 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$, 故 $x=1$ 为函数的第一类间断点(跳跃间断点).

   注: $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的左极限、右极限分别为 0 和 $+\infty$. 这是一个极常见的考点.

4. 令 $t=x-1$, 当 $x\to 1^+$ 时, $t\to 0^+$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2-2x-1}\,\ln x = \sqrt{(3x+1)(x-1)}\,\ln x &= \sqrt{(3t+4)t}\ln(1+t)\\ &\sim 2t^{\frac{3}{2}} = 2(x-1)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

   故 $\alpha=\frac{3}{2}$.

   或者: 由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\,\ln x}{(x-1)^\alpha} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(3x+1)(x-1)}\,\ln x}{(x-1)^\alpha}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{(x-1)}\,\ln x}{(x-1)^\alpha}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln\big(1+(x-1)\big)}{(x-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{(x-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{2}{(x-1)^{\alpha-\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

   则 $\alpha=\frac{3}{2}$ 时,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\,\ln x}{(x-1)^\alpha}=2.$$

5. 由

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{t}=-1,$$

令 $2-x=t$, 则

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(2-x)-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{f(t)-1}=1.$$

此题考查的是导数的定义. 典型错解是用洛必达法则上下求导——但是 f 的可导性是未知的, 导函数的连续性也是未知的.

6.

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'\big(\phi^2(x)-\phi(x^2)\big)\cdot\big(2\phi(x)\phi'(x)-\phi'(x^2)\cdot 2x\big)\\&=2\big(\phi(x)\phi'(x)-x\phi'(x^2)\big)\cdot f'\big(\phi^2(x)-\phi(x^2)\big).\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)+\psi^2(x)}}\,\mathrm{d}\big(\phi^2(x)+\psi^2(x)\big)\\&=\frac{2}{\sqrt{\phi^2(x)+\psi^2(x)}}\big(\phi(x)\phi'(x)+\psi(x)\psi'(x)\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{(1-t)^2},\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\frac{1}{(1-t)^2}\big)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\\&=\frac{\frac{2}{(1-t)^3}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2(1+t^2)}{(1-t)^5}.\end{aligned}$$

9.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x>2,\\ 2x-x^2, & x\leqslant 2,\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,\,+\infty)$, 且在定义域内处处连续. 另外 $x=2$ 是 $f(x)$ 的不可导点.

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2, & x>2,\\ 2-2x, & x<2,\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}2, & x>2,\\ -2, & x<2,\end{cases}$$

故在区间 $(-\infty,\,2)$ 上曲线是凸的; 在区间 $(2,\,+\infty)$ 曲线是凹的. 拐点为 $(2,0)$.

10. $\displaystyle\int\frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\arccos 3x\,\mathrm{d}\big(\arccos 3x\big)=-\frac{1}{6}\big(\arccos 3x\big)^2+C.$

11.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1 x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})-\int_1^2(2-x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})\\&=-\Big[x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x-\Big[(2-x)\mathrm{e}^{-x}\Big]_1^2+\int_1^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}(2-x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \mathrm{e}^{-1} + \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_1^2 \\
&= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}
$$

12. 特征方程为 $r^2 - 7r + 6 = 0$, 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = 6$. 于是原方程对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{6x}.$$

由于这里 $\lambda = 0$ 不是特征根, 所以设原方程的特解为 $y^* = ax^2 + bx + c$, 代入原方程得

$$a = 1,\ b = 2,\ c = \frac{11}{6}.$$

故所求通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{6x} + x^2 + 2x + \frac{11}{6}.$$

13. 由 $\phi(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$, 得

$$\phi(-x) = -x\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{-x} tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

令 $u = -t$, 又 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$
\begin{aligned}
\phi(-x) &= x\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u - 2\int_0^x uf(-u)\,\mathrm{d}u \\
&= x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - 2\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u \\
&= x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \phi(-x).
\end{aligned}
$$

即 $\phi(x)$ 为偶函数.

注: 第一步不拆开也可以. 也可以使用下面的解法.

$$\phi'(x) = (x-2x)f(x) = -xf(x),$$

又 $f(x)$ 为偶函数, 故 $\phi'(x)$ 为奇函数. 从而

$$\phi(x) - \phi(-x) = \int_{-x}^x \phi'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

得 $\phi(x) = \phi(-x)$, 即 $\phi(x)$ 为偶函数.

注: 可以一般地证明, 奇函数的原函数一定是偶函数. 但偶函数的原函数不一定是奇函数. 另外, 偶函数的导数一定是奇函数, 奇函数的导数一定是偶函数.

14. 由积分中值定理, $\exists\eta \in [a,\,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\eta)$, 即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta).$$

又由已知条件 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)$, 故

$$f(\eta) = f(b),$$

从而函数 $f(x)$ 在区间 $[\eta,\, b]$ 上满足罗尔定理的条件, 故 $\exists\xi \in (\eta,\, b) \subset (a,\, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

15. 1875 吨 · 米.

16. 由定积分的几何意义得

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + xf(x) + \int_x^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

两边对 x 求导得

$$0 = 2x^2 + f(x) + xf'(x) - f(x),$$

即 $f'(x) = -2x$, 故 $f(x) = -x^2 + C$. 又 $f(0) = 1$, 故 $f(x) = -x^2 + 1$.

17. 1) 直线 $y = tx$ 与抛物线 $y = x^2$ 相交于点 $(t,\, t)$.

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \int_0^t (tx - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_t^1 (x^2 - tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

将 S 对 t 求导得 $S' = t^2 - \frac{1}{2}$. 令 $S' = 0$, 得 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$, 所以 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为极小值, 也为最小值, 其值为

$$S_{\min} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

2) $V_x = \pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x + \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$