高等数学 (下) · 复习概要

黄正华*

2013 年 06 月 11 日

目录

0 考点提要

0.1 考点

(1) 向量的运算;
(2) 偏导数或全微分的定义;
(3) 隐函数求导 (方程组的情形);
(4) 方向导数与梯度; 散度、旋度;
(5) 空间曲线的切线; 曲面的切平面;
(6) 拉格朗日乘数法;
(7) 二重积分 (交换积分次序);
(8) 三重积分 (截面法, 球面坐标);
(9) 格林公式;
(10) 高斯公式;

*Email: huangzh@whu.edu.cn

(11) 判断绝对收敛与条件收敛;
(12) 幂级数的收敛域;
(13) 逐项积分与逐项求导;
(14) 傅里叶级数展开.

0.2 重要题目与例子

(1) 格林公式: P.204 例 3.4; P.210 习题 A 1(3).
(2) 格林公式: P.210 习题 A 1(5)(6); B 2.
(3) 高斯公式: P.233 A 1(9), 2.
(4) 隐函数求导: P.110 B 5, 7(1).
(5) 偏导数或全微分的定义: P.81 例 3.3; P.84 例 3.5; P.89 A 7.
(6) 逐项积分与逐项求导: P.311 例 5.4; P.313 习题 A 4(2)(3).
(7) 函数展开成幂级数: P.321 例 6.6; P.328 习题 A 2(3).
(8) 傅里叶级数展开: P.343 习题 A 5(2); P.348 A 3.
(9) 拉格朗日乘数法: P.139 A 8, 9; B 3.
(10) 曲线的切线、曲面的切平面: P.125 A 1(3), 8; B 1.
(11) 空间直线方程: P.41 A 9; B 5.

1 空间解析几何与向量代数

主要问题: 向量积; 平面束; 投影曲线; 旋转曲面
常见考点: 异面直线的距离; 异面直线的公垂线

1.1 向量的数量积、向量积、混合积在几何上的应用

(1) 数量积在几何上的应用

向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 即

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\arccos(\widehat{\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b}),$$

其中 $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_b$ 分别是与向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量.

(2) 向量积在几何上的应用

以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

既与 $\boldsymbol{a}$ 垂直又与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的向量为 $k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z},$$

上式中当 b_x, b_y, b_z 中有一个或两个为零时, 应理解为它对应的分子也为零.

(3) 混合积在几何上的应用
以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积是 $\big|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\big|$. 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为棱形成的四面体的体积是 $\frac{1}{6}\big|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\big|$.
设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 都不是零向量, 则 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

1.2 空间平面与直线

一 平面方程的常见形式

类型名称	方程	说明
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$	$\{A,B,C\}$ 是法向量, (x_0,y_0,z_0) 是平面上的一个点.
一般式	$Ax+By+Cz+D=0.$	$\{A,B,C\}$ 是法向量.
三点式	$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0.$	平面过三点 (a_i,b_i,c_i), $i=1,\ 2,\ 3.$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$	a, b, c 是平面在三个坐标轴上的截距.

二 直线方程的常见形式

类型名称	方程	说明
一般式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$	直线是两个平面的交线.
点向式	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}.$	(m,n,p) 为方向向量. 当 m, n, p 有一个或两个为零时, 应理解为它对应的分子也为零.
参数式	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$	t 为参数.
两点式	$\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_1}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_1}.$	直线过两点 (a_i,b_i,c_i), $i=1,\ 2.$

三 旋转曲面

曲线 $l:\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0,$$

绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0.$$

其他的情形有类似的结果.

例 1 确定常数 a, 使直线 l_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{a}$ 垂直于平面 π_1: $3x+6y+3z+25=0$, 并求此时直线 l_1 在平面 $\pi_2: x-y+z-2=0$ 上的投影直线 l_2 的方程.

解 直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,2,a\}$, 平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{3,6,3\}$. 由已知条件得 $\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}$, 即

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{a}{3},$$

故 $a=1$.

投影直线 l_2 的求法这里给出以下三种.

方法一. 先求过直线 l_1 且与平面 π_2 垂直的平面 π 的方程, 平面 π 与 π_2 的交线即为所求曲线. 记平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$. 由

$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k},$$

可取 $\boldsymbol{n}=\{1,0,-1\}$, 又直线 l_1 过点 $P(1,-2,1)$, 则点 P 也在平面 π 上, 从而得平面 π 的点法式方程:

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0,$$

即 $x-z=0$. 故所求投影直线 l_2 的方程为

$$\begin{cases} x-z=0,\\ x-y+z-2=0.\end{cases}$$

方法二. 直线 l_1 的一般方程为

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2},\\ \frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1},\end{cases}\quad 即 \begin{cases} 2x-y-4=0,\\ y-2z+4=0.\end{cases}$$

过 l_1 的平面束为 $2x-y-4+\lambda(y-2z+4)=0$, 即

$$2x+(\lambda-1)y-2\lambda z+(4\lambda-4)=0.$$

要使平面束中的平面 π 与平面 π_2 垂直, 则 λ 满足 $2\cdot1-(\lambda-1)-2\lambda=0$, 即 $\lambda=1$**.** 得投影直线 l_2 的方程为

$$\begin{cases} x-z=0,\\ x-y+z-2=0.\end{cases}$$

方法三. 在直线 l_1 上取一点 $M(2,0,2)$, 求其在平面 π_2 上的投影点 N. 过点 M 且垂直于平面 π_2 的直线方程为 $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$, 由

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1},\\ x-y+z-2=0,\end{cases}$$

得交点 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. 又联立直线 l_1 与平面 π_2 的方程, 得直线 l_1 与平面 π_2 的交点为 $Q(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$, 过点 Q,N 的直线即为所求投影直线 l_2:

$$\frac{x-\frac{4}{3}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{4}{3}}{1}.$$

■

例 2 求直线 l_1: $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 l_2: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$ 的公垂线 l 的方程.

解 解法一 (一般式). 记所求公垂线为 l. 过直线 l_1 和 l 作平面 π_1, 过直线 l_2 和 l 作平面 π_2, 平面 π_1 与 π_2 的交线即为公垂线 l.

直线 l_1 和 l 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{4,-3,1\}$,$\boldsymbol{s}_2=\{-2,9,2\}$. 由

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=-15\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+30\boldsymbol{k},$$

可取公垂线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{3,2,-6\}$.

平面 π_1 过直线 l_1 和 l, 则其法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -6\end{vmatrix}=16\boldsymbol{i}+27\boldsymbol{j}+17\boldsymbol{k}$. 直线 l_1 过点 $P\,(9,-2,0)$, 则 π_1 也过该点. 得 π_1 的点法式方程为

$$16(x-9)+27(y+2)+17(z-0)=0,$$

即 $16x+27y+17z-90=0$. 同理可得过直线 l_2 和 l 的平面 π_2 的方程:

$$58x+6y+31z-20=0.$$

平面 π_1 与 π_2 的交线即为所求公垂线 l, 其方程为

$$\begin{cases}16x+27y+17z-90=0,\\ 58x+6y+31z-20=0.\end{cases}$$

解法二 (点向式). 沿用解法一中的结果, 求出直线 l_2 与平面 π_1 的交点, 即直线 l 与 l_2 的垂足. 由

$$\begin{cases}\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2},\\ 16x+27y+17z-90=0,\end{cases}$$

解得交点为 $(-2,2,4)$, 得公垂线 l 的点向式方程:$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-6}$.

解法三 (两点式) 设公垂线 l 与直线 l_1, l_2 的交点分别为 $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$, 则 M, N 分别满足 l_1, l_2 的 (参数) 方程, 故

$$\begin{cases}x_1=9+4t, & y_1=-2-3t, & z_1=t,\\ x_2=-2\lambda, & y_2=-7+9\lambda, & z_2=2+2\lambda.\end{cases}$$

从而 $\overrightarrow{MN}=\{-2\lambda-4t-9,9\lambda+3t-5,2\lambda-t+2\}$. 又 $\overrightarrow{MN}\perp l_1,\overrightarrow{MN}\perp l_2$, 故

$$\begin{cases}4(-2\lambda-4t-9)-3(9\lambda+3t-5)+(2\lambda-t+2)=0,\\ -2(-2\lambda-4t-9)+9(9\lambda+3t-5)+2(2\lambda-t+2)=0.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}33\lambda+26t+19=0,\\ 89\lambda+33t-23=0,\end{cases}$ 解得 $t=2,\lambda=1$. 从而 M,N 的坐标为 $M(1,4,-2),N(-2,2,4)$, 且 $\overrightarrow{MN}=\{-3,-2,6\}$. 得公垂线 l 的方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+2}{-6}$. ∎

例 3 考察两直线 l_1: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{3}$ 和 $l_2:\begin{cases} x=4t+2, \\ y=-t+3, \\ z=2t-4, \end{cases}$ 是否相交? 如相交, 求出其交点; 如不相交, 求其距离 d.

解 直线 l_1 过点 $P(-1,1,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{2,1,-3\}$; 直线 l_2 过点 $Q(2,3,-4)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=\{4,-1,2\}$. 因为

$$\left[\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\right]=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

所以 l_1, l_2 是异面直线. 下求距离 d.

方法一. 过直线 l_1 作平面 π 与直线 l_2 平行, 则 l_2 上任意一点到 π 的距离, 都等于所求距离 d. 由

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

取平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,16,6\}$. 又平面 π 经过直线 l_1 上的点 $P(-1,1,0)$, 得平面 π 的方程为

$$1\cdot(x+1)+16\cdot(y-1)+6\cdot(z-0)=0,$$

即 $x+16y+6z-15=0$. 直线 l_2 上的一点 $Q(2,3,-4)$ 到平面 π 的距离即为所求:

$$d=\frac{|2+16\times 3+6\times(-4)-15|}{\sqrt{1^2+16^2+6^2}}=\frac{11}{\sqrt{293}}.$$

方法二. 设公垂线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 则 l_1, l_2 上任意两点构成的向量在 $\boldsymbol{s}$ 上投影的绝对值, 即为所求异面直线距离. 由

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

取 $\boldsymbol{s}=\{1,16,6\}$. 又点 P, Q 分别是直线 l_1, l_2 上的点, $\overrightarrow{PQ}=\{3,2,-4\}$, 得

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|}\right|=\left|\frac{3\times 1+2\times 16-4\times 6}{\sqrt{1^2+16^2+6^2}}\right|=\frac{11}{\sqrt{293}}.$$

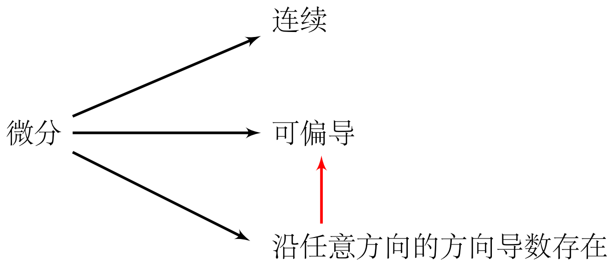
■

2 多元函数微分法及其应用

主要问题: 偏导数或全微分的定义; 方向导数与梯度; 散度、旋度;

常见考点: 隐函数求导 (方程组的情形); 拉格朗日乘数法; 空间曲线的切线; 曲面的切平面;

2.1 基本概念之间的关系



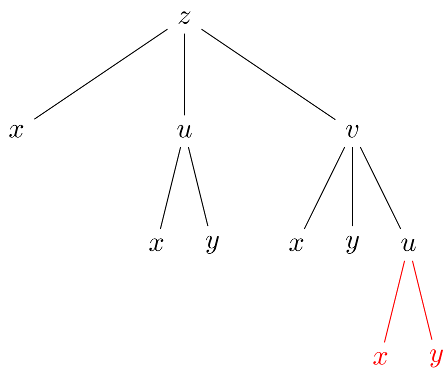
2.2 复合函数求导

一 变量之间的关系, 推荐使用树图.

(1) 树叶只能是自变量.
(2) 对某个变量, 有几片树叶, 就有几个加项.
(3) 连线相乘, 并线相加.

例 4 设 $z=f(x,u,v)$, $u=g(x,y)$, $v=h(x,y,u)$, f, g, h 均可微, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (即教材例 4.9)

解 变量之间的关系用下面的树表示. (注意其中红色的部分: u 是中间变量, 不能出现在树叶的位置, 需要继续添加红色部分所示关系.)



其中 x 有 4 片树叶, y 有 3 片树叶. 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_u\cdot g_x+f_v\cdot h_x+f_v\cdot h_u\cdot g_x,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\cdot g_y+f_v\cdot h_y+f_v\cdot h_u\cdot g_y.$$ ■

二 复合函数求二阶导

很多人在这个问题上没有过关.
切记: 导函数仍然保持变量之间的关系.

2.3 几何应用

一 空间曲线的切线与法平面

(1) 参数方程. 曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), & t \in [\alpha, \beta]. \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

则切向量为

$$\boldsymbol{T} = \{\phi(t_0),\, \psi(t_0),\, \omega(t_0)\}.$$

(2) 一般式方程. 曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, & (1) \\ G(x,y,z) = 0. & (2) \end{cases}$$

则切向量为

$$\boldsymbol{T} = \left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_{P_0},$$

切线方程为

$$\begin{cases} F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0, & (3) \\ G_x(P_0)(x-x_0) + G_y(P_0)(y-y_0) + G_z(P_0)(z-z_0) = 0. & (4) \end{cases}$$

注意到 (3) 式、(4) 式分别为平面 (1) 和 (2) 的切平面. 可见: 曲线的切线, 是这两个平面的切平面的交线.

法平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{vmatrix} = 0.$$

二 空间曲面的切平面与法线方程

(1) 隐式情形 (一般式方程). 曲面 Σ: $F(x,y,z) = 0$, 则法向量

$$\boldsymbol{n} = \{F_x,\, F_y,\, F_z\}\big|_{P_0}.$$

切平面: $F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0$.

法线: $\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)} = \dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)} = \dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

(2) 显式情形. 曲面 Σ: $z=f(x,\,y)$, 则法向量

$$\boldsymbol{n}=\big\{f_x,\,f_y,\,-1\big\}\Big|_{P_0}.$$

切平面: $z-z_0=f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)$.

法线: $\dfrac{x-x_0}{f_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

(3) 参数方程. 设曲面

$$\Sigma:\begin{cases}x=x(u,\,v),\\ y=y(u,\,v),\\ z=z(u,\,v),\end{cases}$$

则法向量为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}_{P_0}.$$

2.4 方向导数与梯度

梯度是一个向量:

$$\mathbf{grad}f(x_0,y_0)=\big\{f_x(x_0,y_0),\,f_y(x_0,y_0)\big\}.$$

(1) 梯度概念的引入, 简化了方向导数的计算表达式. 在可微的条件下, 方向导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}&=f_x(x_0,y_0)\cos\theta+f_y(x_0,y_0)\sin\theta\\ &=\big\{f_x(x_0,y_0),\,f_y(x_0,y_0)\big\}\cdot\big\{\cos\theta,\,\sin\theta\big\}\\ &=\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l}.\end{aligned}$$

(2) 梯度所指的方向, 是函数值增加最快的方向. 这也是用 “梯度” 一词来命名这个概念的缘由.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}&=\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l}\\ &=\big|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\big|\big|\boldsymbol{e_l}\big|\cos\langle\mathbf{grad}f(x_0,y_0),\boldsymbol{e_l}\rangle\\ &=\big|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\big|\cos\langle\mathbf{grad}f(x_0,y_0),\boldsymbol{e_l}\rangle\end{aligned}$$

当取定 $\boldsymbol{e_l}$ 与 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 同方向时, 方向导数取到最大值, 且最大值为 $\big|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\big|$.

3 重积分

主要问题: 二重积分、三重积分的计算

常见考点: 交换二次积分的积分次序; 球面坐标计算三重积分

3.1 二重积分

一 转换为二次积分

主要是看积分区域是方便表达为 X – 型区域还是 Y – 型区域.

若 D 描述为 X – 型区域: $\begin{cases} \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x), \\ a \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

若 D 描述为 Y – 型区域: $\begin{cases} \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \\ c \leqslant y \leqslant d, \end{cases}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y.$$

少数情形要看被积表达式关于 x 或 y 是否容易积分.

例 5 $I = \iint_D \dfrac{\sin y}{y}$, D 由 $y = x$ 及 $x = y^2$ 围成.

解 区域 D 若描述为 X – 型区域, 意味着要先对 y 积分, 但是函数 $\displaystyle\int \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ 是不可积的, 故只能描述为 Y – 型区域. D: $\begin{cases} y^2 \leqslant x \leqslant y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (\sin y - y\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \Big[-\cos y\Big]_0^1 + \Big[y\cos y - \sin y\Big]_0^1 = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

■

例 6 计算 $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{3y}^{3} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 不可积, 故尝试转化 X – 型区域, 先对 y 积分.

区域 D: $\begin{cases} 3y \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$ 转化为 X – 型区域: $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{3}, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{x}{3}} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^3 \frac{x}{3}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2) \\ &= \frac{1}{6}\Big[\mathrm{e}^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^9 - 1). \end{aligned}$$

■

二 转化为极坐标

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

本质: 二重积分的换元法; (另见 P.163 之证明.)
关键: 面积元素 $\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$.

3.2 三重积分

一 先一后二

"先一后二" 即转化为: 先做定积分, 再做二重积分. 也称为 "投影法".

若 Ω: $\begin{cases} z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), \\ (x,y) \in D, \end{cases}$ 则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_D \Big(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

本质是转化为二重积分.

进一步二重积分时, 可能转化为极坐标. 柱面坐标计算三重积分的方法, 等价于此时在计算 "后二" 时使用极坐标.

假定我们在一艘移动的舰船上, 告知飞机到舰船的水平距离 ρ、方向角 φ、高度 z, 可以迅速地确定飞机的位置. (直角坐标、球面坐标, 都没有柱面坐标这么直观地得到其空间位置.)

$\rho = a$(常数) 表示圆柱面 (以 z 轴为中心轴). 柱面坐标系是把整个三维空间看作是无穷多个同心圆柱面的叠加, 每个点比在某个圆柱面上.

我们要了解柱面坐标系, 但是在算法上, 无需把它作为一个独立的方法.

二 先二后一

"先二后一" 即转化为: 先做二重积分, 再做定积分. 也称为 "截面法".

若 Ω: $\begin{cases} (x,y) \in D_z, \\ a \leqslant z \leqslant b, \end{cases}$ 则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_a^b \Big(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z.$$

其中 D_z 是用平面 $z = z$ 与 Ω 相交所得的水平截面.

例 7 计算 $I = \iiint\limits_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

解 由 Ω: $\begin{cases} (x,y)\in D_z: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}, \\ -c\leqslant z\leqslant c, \end{cases}$ 得

$$I=\int_{-c}^{c}\Big(\iint\limits_{D} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}\Big(z^2\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\cdot\pi ab\big(1-\frac{z^2}{c^2}\big)\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

其中 $\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于椭圆区域 D_z 的面积 $\pi ab\big(1-\frac{z^2}{c^2}\big)$. ■

例 8 设 Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. 求: (1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; (2) $\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; (3) $\iiint\limits_{\Omega}(2x^2+10y^2-5z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 (1) 要计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 可以先求 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

由上例知 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$, 对称地可知 $I_x=\iiint\limits_{\Omega}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi a^3bc$, $I_y=\iiint\limits_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. 故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc\big(a^2+b^2+c^2\big).$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$. 故

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi abc.$$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(2x^2+10y^2-5z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc\big(2a^2+10b^2-5c^2\big)$. ■

注 1 先二后一 (截面法) 最擅长用在这种情形: 被积表达式只含有变量 z, 不含有 x, y; 同时, 截面 D_z 的面积又容易算出.

其一般形式可以归纳为计算形如 $\iiint\limits_{\Omega}h(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的积分, 其中 Ω: $\begin{cases}(x,y)\in D_z, \\ a\leqslant z\leqslant b.\end{cases}$ 截面 D_z 的面积一般是关于 z 的函数, 不妨记为 $S(z)$. 则

$$\iiint\limits_{\Omega}h(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\Big(\iint\limits_{D}h(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z=\int_a^b h(z)S(z)\,\mathrm{d}z,$$

迅速得到一个关于 z 的定积分.

三 球面坐标

球面坐标系是用三个参数 r, θ, φ 确定空间某点的位置. $r=a$(常数) 表示球面 (半径为 a, 球心在原点); $\theta=\alpha$(常数) 表示圆锥面 (半顶角为 α); $\varphi=\beta$(常数) 表示半平面 (与 x 轴正向夹角为 β).

在地球表面, 我们是通过海拔、经度、纬度这三个量确定位置. 参数 r, θ, φ 分别类比于海拔、经度、纬度.

球面坐标系是把整个三维空间看作是无穷多个同心球面的叠加. 空间的每个点比在某个球面上.

球面坐标系擅长表达球体、“蛋筒体”. (蛋筒体由圆锥面和球面所围, 而圆锥面和球面在球面坐标系下只需要用 $r=a$(常数), $\theta=\alpha$(常数) 表示.)

例 9 求 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围立体 Ω 的体积.

解 这是一个典型的 “蛋筒体”. 由 Ω: $\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 1, \\ 0\leqslant \varphi\leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \end{cases}$ 得

$$\begin{aligned} V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{3}\big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\big). \end{aligned}$$ ■

4 曲线积分与曲面积分

主要问题: 第二类曲线积分与曲面积分; 斯托克斯公式
常见考点: 格林公式; 高斯公式
积分概念的理解一定要结合其经典引例. 不同积分之间的关系 (或计算公式) 可以通过微元法去解释.

4.1 第一类曲线积分

第一类曲线积分又称**对弧长的曲线积分**, 形如

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是**弧长元素**或称**弧微分**,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}.$$

其经典引例是柱面的面积、曲线形构件的质量问题.

若曲线 L 为参数方程: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 则 $\mathrm{d}s=\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t$, 故

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t.$$

思路: 转化为定积分;

本质: 换元法;

关键: 弧微分公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$.

(i) 若曲线 L 为: $y=y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. 则视为参数方程 $\begin{cases} x=x, \\ y=y(x), \end{cases}$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(ii) 若曲线 L 为: $x=x(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_c^d f\big(x(y),y\big)\sqrt{\big(x'(y)\big)^2+1}\,\mathrm{d}y.$$

4.2 第二类曲线积分

第二类曲线积分又称**对坐标的曲线积分**, 形如

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

其经典引例是*变力沿曲线做功*问题.

设有向曲线

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}\qquad t:\ a\to b,$$

$t=a$, $t=b$ 分别对应于起点 A 和终点 B. 则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

思路: 转化为定积分;

本质: 换元法;

关键: 积分下限 a 对应于起点, 积分上限 b 对应于终点. a 不一定小于 b.

转化为第一类曲线积分

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_L\big(P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\big)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

其中 $\{\cos\alpha,\cos\beta\}\triangleq \boldsymbol{e}_\tau(x,y)$ 为有向曲线 L 上点 (x,y) 处与 L 方向一致的单位切向量.

用元素法说明 (5) 式: 求变力 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿有向曲线 L 所做的功 W.

选取弧长 s 为积分变量. 任取 L 上一段 $[s,s+\mathrm{d}s]$, 左端点坐标为 (x,y). 向量 $\boldsymbol{e}_\tau(x,y)$ 为点 (x,y) 处与 L 方向一致的单位切向量.

将变力沿曲线做功在这个小区间上近似为常力沿直线做功, 即把 $\boldsymbol{F}$ 视为在 $[s,s+\mathrm{d}s]$ 方向、大小不变, 不妨用左端点的力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 来近似, 位移近似为 $\boldsymbol{e}_\tau(x,y)\,\mathrm{d}s$ (即位移大小为 $\mathrm{d}s$, 方向近似为 $\boldsymbol{e}_\tau(x,y)$).

变力 $\boldsymbol{F}$ 在 $[s,s+\mathrm{d}s]$ 上所做的功近似为

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{e}_\tau(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

故

$$\begin{aligned}W &= \int_L \mathrm{d}W \\ &= \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_\tau(x,y)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_L \big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

重要性质

$$\int_{L^-} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

其中 L^- 表示 L 的反向弧.

第二类曲线积分的两个小特点

(1) 沿竖直线段 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$.
沿水平线段 $\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.
(原因: 在竖直线段上, L 上的点满足 $x = C$(常数), 换元代入使 $\mathrm{d}x = 0$.)

(2) 与第一类曲线积分相同: 被积表达式中所有的点都在积分曲线上, 它们满足 L 的方程. 故 L 的方程是可以直接代入积分表达式的.

4.3 格林公式

一 格林公式

设平面闭区域 D 的边界 ∂D 为分段光滑曲线, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数, 则有

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 ∂D 是 D 的正向边界曲线.

(1) 可记为

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) P, Q 勿混淆.

(3) $\displaystyle\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\displaystyle\oint_{\partial D} Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 可独立使用.

二 积分与路径无关的一个具体应用

若 $\mathrm{d}\big(u(x,y)\big) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \Big[u(x,y)\Big]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1),$$

其中 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 分别是 L 的起点、终点.

第二类曲线积分中, 不一定整个被积表达式可以找到原函数, 如果部分表达式可以找到原函数, 可以将此部分先行积分, 以迅速简化原积分表达式.

例 10 计算曲线积分 $I=\int_{\widehat{AMB}}\left[\varphi(y)\cos x-\pi y\right]\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\sin x-\pi\right]\mathrm{d}y$, 其中 $\widehat{AMB}$ 为连接点 $A(\pi,2)$ 与点 $B(3\pi,4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线, 且该路线与线段 $\overline{AB}$ 所围图形面积为 2.

解 注意到 $\varphi(y)\cos x\,\mathrm{d}x+\varphi'(y)\sin x\,\mathrm{d}y=\varphi(y)\,\mathrm{d}(\sin x)+\sin x\,\mathrm{d}(\varphi(y))=\mathrm{d}\big(\varphi(y)\sin x\big)$, 故

$$\int_{\widehat{AMB}}\varphi(y)\cos x\,\mathrm{d}x+\varphi'(y)\sin x\,\mathrm{d}y=\Big[\varphi(y)\sin x\Big]_{(\pi,2)}^{(3\pi,4)}=\varphi(4)\sin 3\pi-\varphi(2)\sin\pi=0.$$

则原式转化为求 $I=-\pi\int_{\widehat{AMB}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y$. 下先求 $\int_{\widehat{AMB}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y$.

$\overline{BA}$: $\frac{x-\pi}{3\pi-\pi}=\frac{y-2}{4-2}$, 即 $x=\pi y-\pi$, y: $4\to 2$.

记 $\widehat{AMB}\cup\overline{BA}$ 所围的区域为 D, 使用格林公式得

$$\oint_{\widehat{AMB}\cup\overline{BA}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2.$$

又

$$\int_{\overline{BA}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y=\int_4^2(y\cdot\pi+1)\,\mathrm{d}y=-6\pi-2,$$

故 $\int_{\widehat{AMB}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y=\left(\oint_{\widehat{AMB}\cup\overline{BA}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y\right)-\left(\int_{\overline{BA}}y\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y\right)=6\pi$, 得 $I=-6\pi^2$. ■

4.4 第一类曲面积分

第一类曲面积分也称对面积的曲面积分, 形如

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\mathrm{d}S$ 为面积元素. 其经典引例是空间曲面构件的质量问题.

设曲面 S 方程为 $z=z(x,y)$, D_{xy} 是 S 在 xOy 面上的投影, 则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

思路: 转化为二重积分;

本质: 换元法;

关键: $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4.5 第二类曲面积分

第二类曲面积分, 这个应该是全书最不易掌握的一个概念. 建议结合流量问题去理解.

一 概念

规则情形的流量: $\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n S$.

非规则情形流量: $\Phi = \displaystyle\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n \, \mathrm{d}S$.

代入 $\boldsymbol{v} = \{P, Q, R\}$, $\boldsymbol{e}_n = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 得

$$\Phi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \, \mathrm{d}S \tag{6}$$

$$\triangleq \iint_S P \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

其中 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z \triangleq \cos\alpha \, \mathrm{d}S$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x \triangleq \cos\beta \, \mathrm{d}S$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \triangleq \cos\gamma \, \mathrm{d}S$, 是 $\mathrm{d}S$ 在各坐标面上的投影. 有正, 亦可为负. (如同 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \cos\theta \cdot |\boldsymbol{b}|$, 投影是数量, 有正亦有负.)

二 计算

共 4 种方法: (1) 回到第一类曲面积分, (2) 合一投影法, (3) 分面投影法, (4) 高斯公式.

设有向曲面 S 满足方程: $z = z(x, y)$.

$$\begin{aligned}
&\iint_S P \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=& \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n \, \mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \, \mathrm{d}S \\
=& \iint_{D_{xy}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \\
=& \begin{cases} \displaystyle\iint_{D_{xy}} \big[P \cdot (-z_x) + Q \cdot (-z_y) + R\big] \, \mathrm{d}\sigma, & \text{若 } \boldsymbol{n} = \{-z_x, -z_y, 1\}, \\ \displaystyle\iint_{D_{xy}} \big[P \cdot z_x + Q \cdot z_y + R \cdot (-1)\big] \, \mathrm{d}\sigma, & \text{若 } \boldsymbol{n} = \{z_x, z_y, -1\}. \end{cases}
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为有向曲面 S 的法向量.

注 2 记 $I = \displaystyle\iint_S P \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则

(1) 算法 “回到第一类曲面积分” 可记为 $I = \displaystyle\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n \, \mathrm{d}S$;

(2) 算法 “合一投影法” 可记为 $I = \displaystyle\iint_{D_{xy}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$.

关键: 确定 $\boldsymbol{e}_n$ 或 $\boldsymbol{n}$.

要理解 “有向曲面的法向量” 的含义: 有向曲面上任一点处的法向量的方向, 总是指向曲面取定的一侧.

S: $z=z(x,y)$,	取上侧,	$\boldsymbol{n}=\{-z_x,-z_y,1\}$;
	取下侧,	$\boldsymbol{n}=\{z_x,z_y,-1\}$.
S: $y=y(z,x)$,	取右侧,	$\boldsymbol{n}=\{-y_x,1,-y_z\}$;
	取左侧,	$\boldsymbol{n}=\{y_x,-1,y_z\}$.
S: $x=x(y,z)$,	取前侧,	$\boldsymbol{n}=\{1,-x_y,-x_z\}$;
	取前侧,	$\boldsymbol{n}=\{-1,x_y,x_z\}$.

例如, S: $z=z(x,y)$, 取上侧. 其法向量是 $\boldsymbol{n}=\{-z_x,-z_y,1\}$ 或 $\boldsymbol{n}=\{z_x,z_y,-1\}$ 之一.

S 取上侧, 则 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向夹角 γ 为锐角, 即 $\cos\gamma>0$. 故有向曲面 S 的法向量只能取 $\boldsymbol{n}=\{-z_x,-z_y,1\}$. (此时满足 $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}>0$.)

一个小结论

若积分曲面 S 与 xOy 面垂直, 则 $\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. (原因: 此时 $\cos\gamma=0$, 故 $\iint_S R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S R\cos\gamma\,\mathrm{d}S=0$.)

若 S 与其他坐标面垂直, 有类似结论.

进一步, 若 S 满足: $x=C$, 则必有 $\iint_S Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$, $\iint_S R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. (可视为 $\mathrm{d}x=0$.)

分面投影法衍生于合一投影法, 即对 $\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 分别单独计算 $\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iint_S Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, $\iint_S R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三 高斯公式

设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在有界闭区域 V 上连续, 且有连续偏导数 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, 则

$$\oiint_{\partial V} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 ∂V 为 V 的边界曲面外侧.

实际使用中要注意: (1) 有向曲面 ∂V 取外侧. (2) ∂V 封闭. 非封闭的情形可以增补平面使之封闭. 其用法和注意事项, 与格林公式类似.

四 斯托克斯公式

5 无穷级数

主要问题: 级数的审敛法; “函数的幂级数” 与 “函数的幂级数展开式” 的区别; “函数的傅里叶级数” 与 “函数的傅里叶级数展开式” 的区别.

常见考点: 判断绝对收敛与条件收敛; 幂级数的收敛域; 逐项积分与逐项求导; 傅里叶级数展开.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$, 是无穷多项求和的问题. 更多的时候是关注和的存在性, 即收敛与否的问题.

理论上, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性转化为讨论前 n 项和数列 $\{s_n\}$ 的敛散性. 即

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \text{数列 } \{s_n\} \text{ 收敛.}$$

其中, $s_n \triangleq u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

实际上, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性是透过各类审敛法来判断, 主要是正项级数审敛法. 非正项级数 (比如交错级数) 可以先讨论其绝对值级数.

级数收敛的必要条件: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

但反之不成立. 经典的例子是调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数发散.

5.1 正项级数审敛法

注意: 比较法、比值法、根值法、积分法, 都是正项级数审敛法, 只能适用于正项级数.

比较法就是一句话: 大的收敛, 小的必收敛; 小的发散, 大的必发散.

比较法的极限形式, 其本质是寻找等价无穷小. 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散. (这里假定两级数都已满足级数收敛的必要条件: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.)

比较法的参照物主要是 (1) p–级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$(注意调和级数隶属于 p–级数), (2) 等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$.

等比级数要注意首项是什么, 比如

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{aq}{1-q}, \qquad (|q| < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}. \qquad (|q| < 1)$$

比值法和根植法, 放在一起记. 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \quad \text{或者} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;
(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散 (且 $u_n \nrightarrow 0$);
(3) 当 $\rho = 1$ 时, 不能判断.

注 3 对正项数列 $\{u_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$. 故根植法是比值法的推论.

积分审敛法: 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

例如: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与反常积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 敛散性相同, 而 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_{1}^{+\infty} = +\infty$.

积分法说明了: **级数是积分的离散形式**.

5.2 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛是 "绝对值级数收敛" 的简称.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

依此结论, 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 的敛散性讨论, 可以先取其绝对值级数, 从而导入多种正项级数审敛法.

若其绝对值级数收敛, 则原级数收敛.

若其绝对值级数发散, 需要转向莱布尼茨判别法.

莱布尼茨判别法: 若 u_n 递减且趋于零, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

莱布尼茨审敛法判断收敛的经典例子: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

收敛. (事实上其和为 $\ln 2$.) 因其绝对值级数为调和级数, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 也是条件收敛的经典例子.

更一般的结论: 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$,

(i) 当 $p > 1$ 时, 级数绝对收敛;

(ii) 当 $0 < p \leqslant 1$ 时, 级数条件收敛;

(iii) 当 $p \leqslant 0$ 时, 级数发散.

5.3 逐项积分与逐项求导

抓住两个基本形式: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. 特点是通项为 x^n 与 n 相乘或消除.

解 思路: 向等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$ 靠拢. 也可能是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$, 注意首项的取值.

注意: 区间端点的敛散性, 在积分或求导之后, 可能有变化, 需要具体讨论.

(1) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x\big(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\big) = x\big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\big)' = x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (-1 < x < 1)$$

且 $x=\pm1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 发散. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}. \qquad (-1<x<1)$$

(2) 记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 两边求导得

$$s'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \qquad (-1<x<1)$$

两边在 0 到 x 上积分, 由 $s(x)=\int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x = s(x)-s(0)=s(x)$, 得

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x), \qquad (-1<x<1)$$

注意到 $x=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散; $x=-1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \qquad (-1\leqslant x<1)$$

■

对 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的衍化: 把 n 改成 $n+1$, $n-1$ 等. 比如

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 衍化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 衍化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

解 由

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} &= x^2\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)',\\
\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\Big)',\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n} &= x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big),\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big),
\end{aligned}$$

易得相应结果. ■

5.4 函数展开成幂级数

$f(x)$ 的幂级数不一定收敛; 即使收敛, 也不一定收敛于 $f(x)$.

如果 $f(x)$ 能够展开成幂级数, 则该幂级数一定是泰勒级数.

5.5 函数展开成傅里叶级数

$f(x)$ 的傅里叶级数不一定收敛; 即使收敛, 也不一定收敛于 $f(x)$.

记 $f(x)$ 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ 的和函数为 $s(x)$, 则

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点;} \\ \frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点.} \end{cases}$$

如果 $f(x)$ 能够展开成三角级数, 则该三角级数一定是傅里叶级数.

设周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{8}$$

上式中的等号只在 $f(x)$ 的连续点处成立. 其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad n=0,1,2,3,\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

(1) 当 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 为奇函数时 (或除有限点外为奇函数), 傅里叶系数为

$$a_n=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

因此奇函数的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

(2) 当 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 为偶函数时 (或除有限点外为偶函数), 傅里叶系数为

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,3,\cdots),$$
$$b_n=0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

因此偶函数的傅里叶级数是只含有余弦项的余弦级数:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

上式中的等号只在 $f(x)$ 的连续点处成立. 其中系数 a_n, b_n 为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad (n=1,2,\cdots).$$

(1) $l=\pi$ 时, 回到周期为 2π 时的情形.

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点})$$

其中 $b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$, $(n=1,2,\cdots)$.

(3) 当 $f(x)$ 为偶函数时,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点})$$

其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$, $(n=0,1,2,\cdots)$.

6 专题: 积分中的对称性

在各类积分中, 注意到 “对称性”, 可以事半功倍地解决问题. 这里的对称一般是两个方面的意思:

(1) 积分区域关于变量的 “轮换对称性”;

(2) 积分区域关于坐标轴 (或坐标面) 对称. 此时, 要看看被积函数中是否有奇函数、偶函数, 并运用对称性的相关结论简化计算.

这些规律在教材中虽然没有正式的论述, 但事实上在解题中已经得到了广泛使用; 而且有些题目的出题意图, 就在考问积分中的对称性规律. 请大家一定要重视.

6.1 轮换对称性

轮换对称性, 是指将积分区域表达式中的变量轮换时, 积分区域不变. 通俗地说, 是指变量在该题目中具有相同的地位.

比如计算曲线积分 $\oint_L |x|\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是正方形曲线 $|x|+|y|=1$.

这里积分曲线 L 关于变量 x 和 y 就具有轮换对称性: x, y 互换, 积分曲线 L 保持不变. 此时一个明显的结论是

$$\oint_L |x|\,\mathrm{d}s=\oint_L |y|\,\mathrm{d}s.$$

所以

$$\begin{aligned}\oint_L |x|\,\mathrm{d}s=\oint_L |y|\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{2}\oint_L \big(|x|+|y|\big)\,\mathrm{d}s \qquad (9)\\ &=\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{d}s \qquad (\text{由 } |x|+|y|=1)\\ &=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

有了这个想法, 计算下面的积分是方便的:

(1) $\oint_L a|x|\,\mathrm{d}s$; (2) $\oint_L \big(a|x|+b|y|\big)\,\mathrm{d}s$.

其中 L 仍是正方形曲线 $|x|+|y|=1$.

例 11 设区域 $D:\ x^2+y^2\leqslant R^2$, 则积分 $I=\iint\limits_D \big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解 利用积分区域的轮换对称性 (x, y 互换, 区域 D 保持不变), 有:

$$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (10)$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D \big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D \big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\big)\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\big)\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\big)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi R^4}{4}\big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\big).\end{aligned}$$

■

例 12 设区域 $D=\big\{(x,y)\ \big|\ x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\big\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则积分 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=$ 〖 〗

(A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

解 由轮换对称性, 有

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma, \qquad (11)$$

所以

$$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=a\iint\limits_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma+b\iint\limits_D \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= (a+b)\iint_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma = (a+b)\cdot\frac{1}{2}\iint_D \mathrm{d}\sigma = \frac{a+b}{2}\pi.$$

应选 (D). ■

注 4 回顾前文可见, 解题步骤 (9), (10), (11), 在本质上是相同的. 所以, 所谓使用轮换对称性解题的方法, 可以抽象为下面的叙述 (以二重积分为例):

当积分区域具有轮换对称性时 (即 x, y 互换, 积分区域 D 保持不变, 如 $D:\ x^2+y^2 \leqslant R^2$), 常常用如下的结论帮助解题:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D \big[f(x,y)+f(y,x)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{12}$$

再回头看一下: (12) 式和 (9), (10), (11) 式, 其方法在本质上是相同的.

例 13 计算 $\oint_\Gamma (x^2+y^2+2z)\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解 由于积分曲线 Γ 关于变量 x, y, z 具有轮换性, 即三个变量轮换位置, 曲线 Γ 方程不变. 故有

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma R^2\,\mathrm{d}s = \frac{2\pi}{3}R^3.$$

同理

$$\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x+y+z)\,\mathrm{d}s = 0.$$

所以

$$\oint_\Gamma (x^2+y^2+2z)\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s + \frac{2}{3}\oint_\Gamma (x+y+z)\,\mathrm{d}s = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

■

6.2 对称区域上的奇偶函数

一 对称区域上的 "奇零偶倍" 规律

"奇零偶倍" 这个规律, 我们在定积分中就已熟知了. 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分, 也满足这个规律.

- 二重积分的对称性:

  若积分区域 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 是关于 } y \text{ 的奇函数;} \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y) \text{ 是关于 } y \text{ 的偶函数.} \end{cases}$$

  其中 D_1 是区域 D 被 x 轴平分的一半.

- 三重积分的对称性:
  若积分区域 D 关于 yOz 平面对称, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\begin{cases}0, & f(x,y,z) \text{ 是关于 } x \text{ 的奇函数;}\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v, & f(x,y,z) \text{ 是关于 } x \text{ 的偶函数.}\end{cases}$$

  Ω_1 是 Ω 的以 yOz 平面为分界面的一半.
- 第一类曲线积分的对称性:
  设曲线 L 关于 y 轴对称, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & f(x,y) \text{ 是关于 } x \text{ 的奇函数;}\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & f(x,y) \text{ 是关于 } x \text{ 的偶函数.}\end{cases}$$

  其中 L_1 为 L 关于 $x\geqslant 0$ 那段曲线.
- 第一类曲面积分的对称性:
  设曲面 Σ 关于 yOz 平面对称, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & f(x,y,z) \text{ 是关于 } x \text{ 的奇函数;}\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, & f(x,y,z) \text{ 是关于 } x \text{ 的偶函数.}\end{cases}$$

  Σ_1 是 Σ 的以 yOz 平面为分界面的一半.

注 5 这几种积分中的对称性, 总结起来就是一句话: **积分区域关于某个量对称时, 要看被积函数是否为另一个量的奇偶函数; 并合乎 "奇零偶倍" 的规则.**

比如对二重积分, 若积分区域关于 x 轴对称, 就要看是否有关于 y 的奇偶函数; 对三重积分, 若积分区域关于 xOy 面对称, 就要看是否有关于 z 的奇偶函数. 其他情形类似.

例 14 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^4 x\right)\mathrm{d}x$, $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin^3 x-\cos^4 x\right)\mathrm{d}x$, 则有 〖 〗

(A) $N<P<M$. (B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$. (D) $P<M<N$.

解 利用对称区间上被积函数的奇偶性, $M=0$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x>0$, $P=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x<0$, 所以选 (D). ■

例 15 设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 其周长记为 a, 则 $\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$ ________.

解 这是第一类的曲线积分. 积分曲线 l 关于 x 轴对称, 函数 $2xy$ 关于 y 为奇函数, 所以

$$\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=\oint_l 2xy\,\mathrm{d}s+\oint_l(3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=0+\oint_l(3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=\oint_l 12\,\mathrm{d}s=12a.$$ ■

例 16 设区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\right\}$, 计算二重积分 $I=\iint_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 由积分区域关于 x 轴对称, 且函数 $\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 为奇函数, 所以 $\iint_D \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$. 则

$$\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\big[\ln(1+\rho^2)\big]_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

■

例 17 设区域 D 是平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则二重积分 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于 〖 〗

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

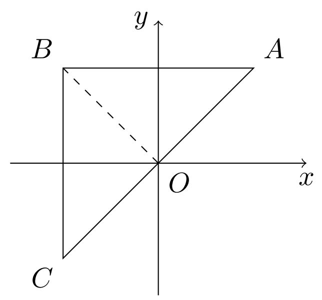
(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(D) 0.

解 积分区域 D 关于 x, y 轴并不对称, 需要添加辅助线, 变成分块有对称性的情形.
连接 BO, 把 D 分成 $D_2\cup D_3$: D_2 即三角形 AOB, D_3 即三角形 COB.
得

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_2}xy\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3}xy\,\mathrm{d}\sigma=0.$$



其中因为 D_2 关于 y 轴对称, 而函数 xy 关于 x 为奇函数, 有 $\iint\limits_{D_2}xy\,\mathrm{d}\sigma=0$;

D_3 关于 x 轴对称, 函数 xy 关于 y 为奇函数, 有 $\iint\limits_{D_3}xy\,\mathrm{d}\sigma=0$.

类似地, 由 D_2 关于 y 轴对称, 函数 $\cos x\sin y$ 关于 x 为偶函数; D_3 关于 x 轴对称, 函数 $\cos x\sin y$ 关于 y 为奇函数, 得

$$\iint\limits_D\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_2}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma.$$

故选 (A). ■

例 18 设 $\Sigma:\ x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$, Σ_1 是 Σ 在第一卦限中的部分, 则有 〖 〗

(A) $\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S$.

(B) $\iint\limits_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S$.

(D) $\iint\limits_{\Sigma}xyz\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\,\mathrm{d}S$.

解 本题中 Σ 关于平面 yOz 对称、且关于平面 zOx 对称, 而 $f(x,y,z)=z$ 关于 x, y 均为偶函数, 所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S &= 2\iint\limits_{\Sigma\cap\{x\geqslant 0\}} z\,\mathrm{d}S \qquad (f(x,y,z)=z \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数})\\ &= 4\iint\limits_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}S, \qquad (f(x,y,z)=z \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数})\end{aligned}$$

再利用区域 Σ_1 的轮换对称性 (注意 Σ_1 : $x^2+y^2+z^2=a^2$, 且 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.),

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} y\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S,$$

因此选 (C).

当然, 这是一个选择题, 我们还可以使用排除法. 对选项 (A), 积分区域关于平面 yOz 对称, 函数 x 是 x 的奇函数, 所以 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=0$. 容易知道 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S>0$, 所以选项 (A) 不正确. 同理, $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S=0$, 选项 (B) 不正确. 积分区域关于平面 yOz 对称, 函数 xyz 是 x 的奇函数, $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S=0$, 选项 (D) 不正确. ■

二 第二类的曲线积分和曲面积分的对称性

前面没有提到第二类的曲线积分、第二类的曲面积分, 这两类积分与方向有关, 其对称性规律稍有不同.

- 第二类曲线积分的对称性.

  对于积分 $I=\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$, 有下面的对称性结论:

  (1) 设 L 关于 y 轴对称, 则

  $$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & P(x,y) \text{ 是关于 } x \text{ 的奇函数;}\\ 2\int_{L_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x, & P(x,y) \text{ 是关于 } x \text{ 的偶函数.}\end{cases}$$

  其中 L_1 为 L 关于 $x\geqslant 0$ 那段曲线.

  (2) 设曲线 L 关于 x 轴对称, 则

  $$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & P(x,y) \text{ 是关于 } y \text{ 的偶函数;}\\ 2\int_{L_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x, & P(x,y) \text{ 是关于 } y \text{ 的奇函数.}\end{cases}$$

  其中 L_1 是 L 在 $y\geqslant 0$ 那段曲线.

- 第二类曲面积分的对称性.

  对于积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$ 有以下对称性结论:

设曲面 Σ 关于 yOz 平面对称, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y,z) \text{ 是关于 } x \text{ 的}\underset{\sim\sim\sim}{\text{偶函数}}; \\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y, & f(x,y,z) \text{ 是关于 } x \text{ 的}\underset{\sim\sim\sim}{\text{奇函数}}. \end{cases}$$

Σ_1 是 Σ 的以 yOz 平面为分界面的一半.

注 6 注意后面两种情形遵循的是 "**奇倍偶零**" 的规则, 这和我们熟知的 "奇零偶倍" 规律是相反的. 其原因仍然在于这两类积分中的方向性问题.

例 19 计算 $\int_L x|y|\,\mathrm{d}x$, 其中 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从 $(1,-1)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧.

解 因 L 关于 x 轴对称, 被积函数 $x|y|$ 是 y 的偶函数, 所以 $\int_L x|y|\,\mathrm{d}x = 0$. ■

例 20 计算 $I = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 的外侧.

解 因为 Σ 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 所以 $I = 3\oiint\limits_{\Sigma} \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 又因为 Σ 关于 xOy 面上下对称, 且 $\frac{z}{r^3}$ 是 z 的奇函数, 则 $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{\Sigma_{\text{上}}} \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 所以

$$I = 6\iint\limits_{\Sigma_{\text{上}}} \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{6}{R^3}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{6}{R^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r = 4\pi.$$

■