武汉大学 2013－2014 学年第一学期

《离散数学》复习题

1. 已知一个环 $\langle\{a,b,c,d\},+,*\rangle$, 它的运算由下表给出:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

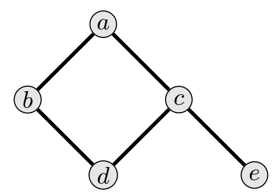
$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

它是一个交换环吗? 它有乘法幺元吗? 这个环中的零元是什么? 并求出每个元素的加法逆元.

2. 将公式 $G=\big((P\wedge Q)\vee\neg R\big)\to P$ 化为析取范式.

3. 设集合 $A=\{a,\,b,\,c,\,d,\,e\}$, 半序关系 R 的哈斯图如图所示. 若 A 的子集 $B=\{c,\,d,\,e\}$, 求:

   (1) 用列举法写出半序关系 R 的集合表达式;
   (2) 写出集合 B 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界.
   (用一张表表示, 不存在用 $\varnothing$ 表示)



4. 设 $A=\{a,\,b,\,c,\,d\}$, $R=\big\{\langle a,\,b\rangle,\,\langle b,\,a\rangle,\,\langle b,\,c\rangle,\,\langle c,\,d\rangle\big\}$, 求 R 的自反、对称和传递闭包.

5. 化简集合表达式: $\big((A\cap B)\cup A\big)\oplus\big((B\cap\sim B)\oplus A\oplus(B\cup\sim B)\big)$.

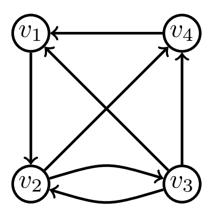
6. 已知 $A=\{a,\,b,\,c,\,d\}$, $R^{-1}=\big\{\langle b,\,a\rangle,\,\langle c,\,b\rangle\big\}$, 求 $M(R)$, 及 R 的传递闭包 $t(R)$.

7. 已知有向图 D 的顶点集合 $V(D)=\{v_1,\,v_2,\,v_3,\,v_4\}$, 其邻接矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求从 v_1 到 v_3 长度小于等于 3 的通路个数.

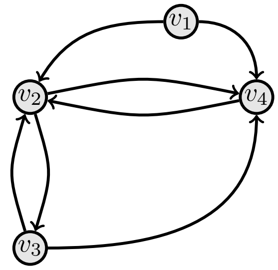
8. 求下图 G 的邻接矩阵, 并用 Warshall 算法求可达性矩阵.



9. 求如下有向图的邻接矩阵 A, 指出从 v_3 到 v_2 且长度为 2 和 4 的路. 并计算 A^2, A^4 来验证.

姓名________ 学号________

装 订 线

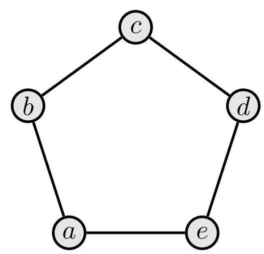


10. 设 $S \neq \varnothing$, 在 S 的幂集 $\mathscr{P}(S)$ 上定义对称差运算 $\oplus$:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}, \quad A, B \in \mathscr{P}(S)$$

试问在 $\mathscr{P}(S)$ 上对于运算 $\oplus$ 是否有幺元? 是否有零元? $\mathscr{P}(S)$ 中的元素关于 $\oplus$ 是否有逆元? 如果有请求出.

11. 给定右图 G.
    (i) 画出图 G 相对于完全图的补图 $\overline{G}$;
    (ii) 给出 $\overline{G}$ 的邻接矩阵.
    (iii) 说明 $\overline{G}$ 是否是欧拉图? 为什么?
    (iv) 说明 $\overline{G}$ 是否是汉密尔顿图? 为什么?
    (v) G 与 $\overline{G}$ 是否同构? 为什么?



12. 已知 $R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \equiv y \mod 3\}$, 证明 R 为等价关系, 并求 8 关于 R 的等价类.

13. 设 G 刚好包含 $x^3 = 1$ 的三个根:

$$1, \qquad \varepsilon_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

对于普通乘法来说, G 构成一个群. 为什么? 是循环群吗? 请说明理由.

14. 下面两个矩阵分别是图 G_1, G_2 的邻接矩阵. 画出图 G_1, G_2, 并判断它们是否同构.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

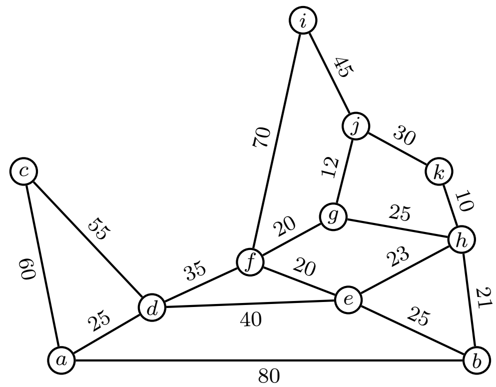
15. 证明推理: $\Big((\forall x)\Big(P(x) \to \big(Q(x) \wedge R(x)\big)\Big)$, $(\exists x)P(x) \Rightarrow \big(\exists x)(P(x) \wedge R(x)\big)$.

16. 设 $\mathbb{Z}$ 为整数集合, k 为正整数, R 是同余模 k 的关系, 即

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod{k}\}.$$

试证: (1) R 是等价关系; (2) 全体等价类所构成的集合是有限循环群, 这里规定加法运算为 $[a]_R \oplus [b]_R \triangleq [a+b]_R$.

17. 下图中的连线表示的是尚未铺设的公路, 每条边上的权值代表连接两个小镇的公路长度. 问应该选择铺设哪些公路, 使得任意两个的小镇之间都有公路相通, 而且使得铺设公路的总长度最小?



18. 对下面的论述构造一个证明:

“甲、乙、丙、丁四人参加拳击比赛, 比赛结果只有胜负, 没有平局. 如果甲获胜, 则乙失败; 如果丙获胜, 则乙也获胜; 如果甲不获胜, 则丁不失败. 所以, 如果丙获胜, 则丁不失败.”

19. 某项任务需要在 A, B, C, D, E 五个人中派一些人去完成, 但派人时要求受下列条件的约束:

    (1) 若 A 去, 则 B 必去;

    (2) D, E 两人中必有人去;

    (3) B, C 两人中有人去, 但只能去一人;

    (4) C, D 两人要么都去, 要么都不去;

    (5) 若 E 去, 则 A, B 都去.

    问应如何派人?

20. 甲、乙、丙、丁四个人有且仅有两人参加围棋比赛. 关于谁参加比赛, 下列四种判断都是正确的: (1) 甲和乙只有一个人参加; (2) 丙参加, 则丁必参加; (3) 乙和丁至多有一人参加; (4) 丁不参加, 则甲也不会参加. 请推断是哪两个人参加比赛.

21. 设 T 是正则二叉树, 有 l 片树叶, i 个分枝点. 证明 T 的边数 $e = 2l - 2$.

22. 若完全 m 叉树有 n 个分枝点, 且内部通路长度的总和为 I, 外部通路长度的总和为 E, 则 $E = (m-1)I + mn$.

23. 设 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是代数系统, B 是集合, 试判断 V 是否为半群、独异点、群? 为什么? 并求 $\mathscr{P}(B)$ 中的任意元素 x 的 n 次幂($n \in \mathbb{N}$).

24. 设 G 是群, $a, b \in G$, 且 $(ab)^2 = a^2b^2$, 证明 $ab = ba$.

25. 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数. 个体域为实数集合. 构造下面推理的证明: “不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.”

参考答案

1. (i) 因为 $*$ 的运算表是对称的, 所以环 $\big\langle\{a,b,c,d\},+,*\big\rangle$ 是交换环;

   (ii) 没有乘法幺元;

   (iii) 环中的零元是 a;

   (iv) 由 $+$ 运算表可见: a 和 c 以自身为加法逆元; b 和 d 互为加法逆元.

2.

$$
\begin{aligned}
&\big((P\wedge Q)\vee\neg R\big)\to P\\
\Leftrightarrow&\neg\big((P\wedge Q)\vee\neg R\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&\big(\neg(P\wedge Q)\wedge\neg\neg R\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&\big((\neg P\vee\neg Q)\wedge R\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&\big((\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge R)\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge R)\vee P
\end{aligned}
$$

3. (1) $R=I_A\cup\{\langle d,\,b\rangle,\,\langle d,\,c\rangle,\,\langle d,\,a\rangle,\,\langle b,\,a\rangle,\,\langle c,\,a\rangle,\,\langle e,\,c\rangle,\,\langle e,\,a\rangle\}$

   (2) 集合 B 的极大元: c; 极小元: d、e; 最大元: c; 最小元: 无; 上界: c、a; 最小上界: c; 下界: 无; 最大下界: 无.

4. $M_r=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $M_s=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $M_t=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5.

$$
\begin{aligned}
&\big((A\cap B)\cup A\big)\oplus\big((B\cap\sim B)\oplus A\oplus(B\cup\sim B)\big)\\
=&A\oplus\varnothing\oplus A\oplus E\\
=&A\oplus A\oplus E\\
=&\varnothing\oplus E\\
=&E
\end{aligned}
$$

(E 表示全集)

6.

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$t(R)=\{\langle a,\,b\rangle,\,\langle b,\,c\rangle,\,\langle a,\,c\rangle\}$.

7.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\\1&0&1&0\\0&3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\\1&0&1&0\\0&3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&1&3\\1&5&1&4\\1&1&1&1\\6&6&3&7\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&3&1&3\\1&5&1&4\\1&1&1&1\\6&6&3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\\1&0&1&0\\0&3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&11&4&11\\11&13&6&14\\3&4&2&4\\15&27&9&26\end{pmatrix}$$

从 v_1 到 v_3 长度小于等于 3 的通路个数为

$$a_{13}^{(1)}+a_{13}^{(2)}+a_{13}^{(3)}=0+1+4=5.$$

8. 图 G 的邻接矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

用 Warshall 算法计算: 逐列进行. 在第 i 列中若有 $a_{ji}=1$, 则把第 i 行叠加到第 j 行.

$$M:=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}}_{i=1}:=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{i=2}$$

$$:=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{i=3}:=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{i=4}=P.$$

9.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&2&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} A^3=\begin{pmatrix}0&2&1&2\\0&1&2&2\\0&2&1&2\\0&2&0&1\end{pmatrix} A^4=\begin{pmatrix}0&3&2&3\\0&4&1&3\\0&3&2&3\\0&1&2&2\end{pmatrix}$$

10. $\varnothing$ 是幺元. 因为对任意 $A \in \mathscr{P}(S)$,

$$\begin{aligned} A \oplus \varnothing &= (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) \\ &= A \cup \varnothing \\ &= A \end{aligned}$$

任意 $A \in \mathscr{P}(S)$, 其逆元就是 A 自身. 因为:

$$\begin{aligned} A \oplus A &= (A - A) \cup (A - A) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

11. (略)

12. 证明 R 是等价关系

(1) $\forall x \in \mathbb{N}, 3|(x-x) \Rightarrow x \equiv x \mod 3 \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$.

所以, R 具有自反性.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 则$x \equiv y(\mod 3) \Rightarrow 3|(x-y) \Rightarrow 3|(y-x) \Rightarrow y \equiv x(\mod 3) \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$. 所以, R 具有对称性.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 且 $\langle y, z\rangle \in R$. 则$x \equiv y(\mod 3)$ 且 $y \equiv z(\mod 3) \Rightarrow 3|(x-y)$ 且 $3|(y-z) \Rightarrow 3|((x-y)+(y-z)) \Rightarrow 3|(x-z) \Rightarrow x \equiv z(\mod 3) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$.

所以, R 具有传递性.

综上所述, R 是等价关系.

8 关于 R 的等价类 $[8] = \{y \mid y = 3x+2, x \in \mathbb{N}\}$.

13. (1) $\langle G, \times\rangle$ 是一个群:

(i) 运算封闭. 注意, 其中

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1+(-3)-2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \varepsilon_2.$$

(ii) 满足结合律.

(iii) 幺元是 1.

(iv) 逆元存在: ε_1 与 ε_2 互逆; 幺元 1 的逆元是自己.

(2) 是循环群: ε_1 与 ε_2 都是生成元.

14. 图 G_1, G_2 不同构.

15. 列表证明:

(1)	$(\exists x)P(x)$	P
(2)	$P(c)$	ES(1)
(3)	$\Big(\forall x\Big)\Big(P(x) \to \big(Q(x) \wedge R(x)\big)\Big)$	P
(4)	$P(c) \to \big(Q(c) \wedge R(c)\big)$	US(3)
(5)	$Q(c) \wedge R(c)$	T(2),(4) I
(6)	$R(c)$	T(5) I
(7)	$P(c) \wedge R(c)$	T(2),(6) I
(8)	$(\exists x)(P(x) \wedge R(x))$	EG(7)

16. 设任意 $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

(i) 因 $(a-a)/k = 0$, 故 $\langle a, a\rangle \in R$, 即 R 是自反的.

(ii) 若 $\langle a, b\rangle \in R$, 可令 $a - b = kt$ (t 为整数), 则 $b - a = -kt$, 所以

$$b \equiv a \pmod k.$$

(iii) 若 $\langle a, b\rangle \in R$, $\langle b, c\rangle \in R$, 可令 $a - b = kt$, $b - c = ks$ (其中 t, s 为整数), 那么 $a - c = (a-b) + (b-c) = k(t+s)$, 即

$$a \equiv c \pmod k.$$

故 $\langle a, c\rangle \in R$.

综上所述, R 是等价关系.

记 $G = \big\{[0], [1], [2], \cdots, [n-1]\big\}$, 则 $\langle G, \oplus\rangle$ 是一个群. 易见 G 的幺元 $e = [0]$, 且 $[1]$ 是 G 的一个生成元.

任意 $[i] \in G$, 有

$$[i] = \underbrace{[1] \oplus [1] \oplus \cdots \oplus [1]}_{i} \triangleq [1]^i,$$

所以,

$$G = \big\{[1], [1]^2, [1]^3, \cdots, [1]^{n-1}, [1]^n = [0] = e\big\}.$$

即证等价类所构成的集合是有限循环群.

17. 用 Kruskal 算法求图的最小生成树. 选择的步骤可以用下面的表格表示:

步骤	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总权值
边	$\{h,k\}$	$\{g,j\}$	$\{f,g\}$	$\{e,f\}$	$\{b,h\}$	$\{e,h\}$	$\{a,d\}$	$\{d,f\}$	$\{i,j\}$	$\{c,d\}$	
权值	10	12	20	20	21	23	25	35	45	55	266

18. 设 A: 甲获胜. B: 乙获胜. C: 丙获胜. D: 丁获胜. 则问题归结为证:

$$A \to \neg B, C \to B, \neg A \to D \Longrightarrow C \to D.$$

列表证明如下:

(1)	$A \to \neg B$	P
(2)	$B \to \neg A$	T(1) E
(3)	$\neg A \to D$	P
(4)	$B \to D$	T(2),(3) I
(5)	$C \to B$	P
(6)	$C \to D$	T(4),(5) I

19. A, B, C, D, E 赋值为 11001 或 00110 时, 满足所有的条件为真. 所以可以有两个指派方式: (1) A, B, E; (2) C, D.

20. 设 A: 甲参加. B: 乙参加. C: 丙参加. D: 丁参加. 则题设的四个条件为: (1) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$; (2) $C \to D$; (3) $\neg B \vee \neg D$; (4) $\neg D \vee \neg A$.

已知有两人参加比赛, 则对 A, B, C, D 赋值, 且其中两个为 1, 两个为 0, 能使得题设条件真值都为 1 的赋值, 即是所求的结果.

所有可能的赋值一共有 6 种: 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011. 其中, 赋值 1100, 0011 使 $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ 真值为 0; 赋值 1010 使 $\neg D \vee \neg A$ 真值为 0; 0110 使 $C \to D$; 真值为 0; 0101 使 $\neg B \vee \neg D$ 真值为 0; 只有赋值 1001 使四个条件的真值都为 1.

所以, 可以推定是 A, D 两人参加了比赛.

21. 设 T 有 m 条边, 可得:

$$l + 3i - 1 = 2e \tag{1}$$

根据树的性质可得:

$$e = l + i - 1 \tag{2}$$

解由 (1), (2) 构成的方程组得: $e = 2l - 2$.

故结论成立.

22. 证明: 对分枝点数 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时, $E=m$, $I=0$. 故 $E=(m-1)I+mn$ 成立.

假设 $n=k-1$ 时成立, 即 $E'=(m-1)I'+m(k-1)$.

当 $n=k$ 时. 取一个其儿子为树叶的分枝点 v , 删去 v 的 m 个儿子, 得到新树 T', 并设该分枝点与根的通路长度为 l,.

将 T' 与原树比较, 它减少了 m 片长度为 $l+1$ 的树叶和一个长度为 l 的分枝点, 且增加了 1 片长度为 l 的树叶. 所以

$$E'=E-m(l+1)+l, \qquad I'=I-l$$

因为 T' 有 $k-1$ 个分枝点, 故

$$E'=(m-1)I'+m(k-1)$$

联立上式得

$$E-m(l+1)+l=(m-1)(I-1)+m(k-1)$$

即得证:

$$E=(m-1)I+mn$$

23. 代数系统 $V=\langle\mathscr{P}(B),\cap\rangle$ 是半群, 因为集合的 $\cap$ 运算满足结合律.

代数系统 $V=\langle\mathscr{P}(B),\cap\rangle$ 是独异点, 因为代数系统 $V=\langle\mathscr{P}(B),\cap\rangle$ 是半群, 且 $\forall x\in\mathscr{P}(B)$, 均有 $x\subseteq B\Rightarrow x\cap B=B\cap x=x$. 因此, B 是幺元.

代数系统 $V=\langle\mathscr{P}(B),\cap\rangle$ 不是群, 因为: 如果 $x\subset B$, 则不存在 $y\in\mathscr{P}(B)$ 使得 $x\cap y=B$

$$x^n=\overbrace{x\cap x\cap\cdots\cap x}^{n}=x$$

24. 因为群满足消去律, 所以

$(ab)^2=a^2b^2\Rightarrow abab=aabb\Rightarrow bab=abb\Rightarrow ba=ab$

25. 证明: 前提: $\neg(\exists x)(F(x)\wedge H(x)),(\forall x)(G(x)\to H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x)\to\neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x)\wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x)\vee\neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x)\to\neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y)\to\neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x)\to H(x))$	P
(6)	$G(y)\to H(y)$	US(5)
(7)	$G(y)\to\neg F(y)$	T(6),(4) I
(8)	$(\forall x)(G(x)\to\neg F(x))$	UG(7)