武汉大学数学与统计学院 2014 – 2015 学年第一学期

《矩阵论》 期末考试试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 11 道试题, 满分 100 分, 考试时间 150 分钟.
2. 请将答案全部写在**武汉大学试卷纸**上, 写在其他位置无效.

姓 名__________________ 学 号__________________ 院 系__________________

一、解答下列各题(本题满分 64 分, 每小题 8 分)

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小多项式.

2. 已知线性变换 $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 \end{bmatrix}.$$

求该线性变换的核空间 $N(\boldsymbol{A})$ 与值域空间 $R(\boldsymbol{A})$.

3. 设 $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, 取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

及

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求 (1) 由基底 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$; (2) $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 在基底 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

4. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times p}$, 求证:

(1) $R(\boldsymbol{AB}) \subseteq R(\boldsymbol{A})$;

(2) $N(\boldsymbol{B}) \subseteq N(\boldsymbol{AB})$.

5. 设数域 F 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^3 = 3\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}.$$

判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化.

6. 已知 $\boldsymbol{A}_k = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3^k} & \dfrac{\pi}{4^k} \\ \dfrac{1}{k!} & 0 \end{bmatrix}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. 问矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 是否收敛? 若收敛, 求其和.

7. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$, 并求变换矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$.

8. 对上题中的 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$, $\sin \boldsymbol{A}$.

二、计算下列各题(本题满分 36 分, 每小题 12 分)

9. 在 F^4 中, $V_1 = \mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$, $V_2 = \mathrm{span}[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3]$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix},$$

试求 $V_1 + V_2$ 与 $V_1 \cap V_2$ 的维数, 并分别求 $V_1 + V_2$ 与 $V_1 \cap V_2$ 的一组基底.

10. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的正奇异值 σ_i;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的标准正交特征向量;

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解.

11. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解;

(2) 求广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$;

(3) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

2014−2015 学年第一学期《矩阵论》 期末考试
参考答案 · (A 卷)

1. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3,$$

计算得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^2=\boldsymbol{O},\qquad \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{O},$$

故最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

2. 线性变换 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\-1&-11&2&-5\\3&5&0&1\end{bmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 得

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&\frac{5}{14}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=[5,-3,-14,0]^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_2=[1,-1,0,2]^{\mathrm{T}}.$$

从而 $N(\boldsymbol{A})=\mathrm{span}[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2]$.
又从 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形看出, $\boldsymbol{A}$ 的列向量的一个极大无关组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-3\\-11\\5\end{bmatrix}.$$

从而$R(\boldsymbol{A})=\mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$. ($R(\boldsymbol{A})$ 也可以表达为 $\boldsymbol{A}$ 的全部列向量所张的空间.)

3. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\\ \boldsymbol{\beta}_4&=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基底 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+2x_2-2x_3+2x_4 \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4 \\ -x_1+x_2-x_3+2x_4 \\ x_1-x_2+x_3-x_4 \end{bmatrix}.$$

4. (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{AB}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{ABx}.$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Bx}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Az}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$, 从而

$$R\big(\boldsymbol{AB}\big) \subseteq R(\boldsymbol{A}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{ABy} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{AB})$, 因此

$$N(\boldsymbol{B}) \subseteq N\big(\boldsymbol{AB}\big).$$

5. $\boldsymbol{A}^3 - 3\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$, 故 $g(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式. 由于

$$g(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-1),$$

分解为不同一次因式的乘积, 故 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

6. 因为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{4^k} = \frac{\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\pi}{3},$$

又

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

所以矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 收敛, 且其和为 $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \dfrac{4\pi}{3} \\ e & 0 \end{bmatrix}$.

7. 先求 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形. 因

$$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

所以若当标准形为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3]$, 则有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

得 $[\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3] = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3]$. 于是有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{p}_1, &\quad \text{即} \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{p}_2, &\quad \text{即} \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 &= \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3, &\quad \text{即} \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3 &= -\boldsymbol{p}_2. \end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 是方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.
可以选取 $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$. 但是不能直接令 $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$, 因为 $\boldsymbol{p}_2$ 还要保证 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_2$ 有解.
令

$$\boldsymbol{p}_2 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -k_1 + 3k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

其中 k_1, k_2 是不全为零的待定常数. 由

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{p}_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -6 & k_1 - 3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 1 & 1 & -3 & -k_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3k_1 - 3k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 - k_2 \end{array}\right],$$

故要使方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_2$ 有解, 需满足 $k_1 = k_2 (\neq 0)$, 取 $k_1 = k_2 = 1$, 于是

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

且 $\boldsymbol{p}_3 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. 故可取

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. $\boldsymbol{J}_1 = 1$, $\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$, 记 $f(z) = \mathrm{e}^z$. 则

$$f(\boldsymbol{J}_1) = \mathrm{e}, \qquad f(\boldsymbol{J}_2) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ & \mathrm{e} \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & 0 \\ & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ & & \mathrm{e} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathrm{e} & -2\mathrm{e} & 6\mathrm{e} \\ -\mathrm{e} & 0 & 3\mathrm{e} \\ -\mathrm{e} & -\mathrm{e} & 4\mathrm{e} \end{bmatrix}$, 相仿地有

$$\sin \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sin 1 - 2\cos 1 & -2\cos 1 & 6\cos 1 \\ -\cos 1 & \sin 1 - \cos 1 & 3\cos 1 \\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1 + 3\cos 1 \end{bmatrix}.$$

9. $V_1+V_2=\mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$.

$$\big[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\big]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&2\\1&1&2&2&-2&3\\0&-1&1&0&2&1\\2&3&-2&-6&4&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&10&2\\0&1&0&0&-6&-1\\0&0&1&0&-4&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix},$$

故 $\dim(V_1+V_2)=4$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 故 $\dim V_1=3$. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关, 故 $\dim V_2=3$. 由维数定理得

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=3+3-4=2.$$

由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_2&=10\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta}_1,\\ \boldsymbol{\beta}_3&=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_1,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2&=10\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3\in V_1\cap V_2,\\ -\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3&=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1\cap V_2,\end{aligned}$$

故

$$V_1\cap V_2=\mathrm{span}\big[-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3\big]=\mathrm{span}\big[(0,-4,2,10)^{\mathrm{T}},(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\big].$$

10. (1) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$, 从而

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}|=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的特征值为 1, 3. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的正奇异值为 $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\sqrt{3}$.

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1, 3, 0 的标准正交特征向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{v}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的对应于特征值 1, 3 的标准正交特征向量分别为

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

(3) 取 $\boldsymbol{U}=\big[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\big]$, $\boldsymbol{V}=\big[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\big]$, 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}.$$

11. (1) $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}.$$

(2) 因

$$\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{+} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{R}^{+}\boldsymbol{L}^{+} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = 2$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 故方程组无解. 其最小范数二乘解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} = [-2, 2, 2, 0]^{\mathrm{T}}.$$