线性代数 (54 学时) 总复习

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

2016 年 6 月 23 日

目录

1 全书总结

> 如果非要给这本书加一个副标题, 我希望是 ——《一个方程组引发的故事》.

1.1 全书概览

我们现在使用的教材是工程数学《线性代数》, 是线性代数学科比较基础的部分. 这一部分的中心是围绕 "用高斯消元法求解线性方程组" 的问题展开的. 全书中心的话题其实是第二章 P.41 的高斯消元法.

由此衍生了三个工具 —— 行列式、矩阵、向量组, 从不同的角度来阐述方程组的求解问题.

要特别注意, 矩阵、向量组、方程组这三个问题的相互转化. 比如, 向量组的问题, 可能需要转化成矩阵的问题来解决; 也可能要借助方程组解的相关理论来解决.

第一章的中心可以认为是克拉默法则, 前面的行列式讨论是为克拉默法则作铺垫的.

高斯消元法的过程, 可以简单地表示为方程组的增广矩阵的初等行变换, 这自然引出了对矩阵的专门讨论. 方程组经过高斯消元法总是会稳定地保留一定数量的方程, 这就对应着秩的问题. 矩阵的细部是向量, 更进一步讨论向量的线性表示、线性相关性才说明了, 为什么矩阵的初等行变换中有一些行会被变为零, 为什么消元法解方程时有的方程会被消掉. 极大无关组的概念才真正解释了, 为什么消元法解方程组时保留下来的方程个数是稳定不变的.

既然中心的议题是解方程组, 那么关于线性方程组解的理论要非常清楚, 比如 “$n-r$” 的含义, 有解、无解的充要条件.

1.2 要点 TOP 10

下面的要点列为 TOP 10 是因为其理论重要性、易错等原因.

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$; $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|$.

(VI) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. (教材 P.250 习题 28.)

(VII) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-r$ 个线性无关的解构成.

(VIII) 线性方程组有解、无解的充要条件.

(IX) 矩阵可对角化的充要条件.

(X) 相抵、相似、合同, 它们的区别与联系.

1.3 例题 TOP 5

下述的例子特别重要:

(I) 行列式计算的经典例题. (打印版 CH1, P.26, 例 23.)

(II) 带参量的线性方程组解的讨论. (打印版 CH3, P.33, 例 63. CH3, P.59, 例 113.)

(III) 打印版 CH5, P.17, 例 10, 特征值性质的应用. 这是近年考研常见的考点.

(IV) 打印版 CH5, P.24, 例 25. 综合了矩阵对角化的充要条件、"$n-r$" 结论.

(V) 教材 P.137 例 3, 常用结论. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则视 $\boldsymbol{B}$ 的列为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 这个观念很重要.

1.4 常见考点

(1) n 阶行列式的计算;

(2) 解矩阵方程;

(3) 带参量的线性方程组解的讨论;

(4) 找出极大无关组, 并表示余下的向量;

(5) 二次型的标准化;

2 行列式

行列式

(1) 行列式的定义;

(2) 行列式的性质;

(3) 计算行列式的一般方法: 化上三角行列式法; 降阶法; 升阶法 (加边法);

(4) 重要结论: (对角行列式、上下三角行列式、范德蒙行列式、准三角行列式、奇数阶反对称行列式);

(5) 利用矩阵的秩的性质.

行列式的计算

Example 1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m,|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$.

解:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| &= |\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|\\ &= -|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\ &= n-m.\end{aligned}$$

Example 2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是三维列向量, 记三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$, 已知 $|\boldsymbol{A}|=1$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

解:

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal[c_2-c_1]{c_3-c_2} |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal{c_3-c_2} |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&= 2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal{c_2-3c_3} 2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal[c_1-c_3]{c_1-c_2} 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 2|\boldsymbol{A}| = 2.
\end{aligned}
$$

另解: 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3) \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以

$$
|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2.
$$

Example 3. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-3r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 11 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+4r_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 11 \end{vmatrix} = 50.
$$

所以 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = 50^2 = 2500$. □

Example 4. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵, 且

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant 3,
$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为降秩矩阵, 从而 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = 0$. □

Example 5. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0\ (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

两边取行列式, 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 得

$$(-1)^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^3, \qquad \text{即} \ -|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3.$$

故 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 由前述 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$. 而题设 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}|=-1$. □

☞ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对角线上的元素依次为

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=0, \quad a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=0, \quad a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=0,$$

故 $a_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

以上是以 3 阶的矩阵为例, n 阶矩阵的情形同理.

3 矩阵及其运算

矩阵及其运算

(1) 矩阵的运算 (计算矩阵的方幂, 矩阵的转置与对称矩阵, 求逆矩阵, 解矩阵方程.)

(2) 逆矩阵的性质.

(3) 矩阵可逆的证明.

计算矩阵的方幂

Example 6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^{2006}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$$
$$=(a+b+c)^{2005}\boldsymbol{A}.$$

Example 7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: $\boldsymbol{A}^n=(-3)^{n-1}\boldsymbol{A}$. □

Example 8. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}^k$ 及其特征值和特征向量.

解: (1) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, 则对应特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则对应特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$ (k_2, k_3 不同时为 0).

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,2,2)$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2,2)\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2,2)^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2^k,2^k)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

下面先求 $\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-1&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&2^k\\1&2^k&0\\1&0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&-2^k+1\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由特征值与特征向量的性质可知: $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 $1,2^k,2^k$, 对应的特征向量依次为 $k_1\boldsymbol{p}_1$ ($k_1\neq 0$), $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$ (k_2, k_3 不同时为 0). □

解矩阵方程

Example 9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\2&-1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$. 其中

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&0&4\\0&-1&5\end{pmatrix}.$$

由

$$
(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&2&-3\\1&1&0&2&0&4\\2&1&1&0&-1&5\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&2&-3\\0&2&-1&1&-2&7\\0&3&-1&-2&-5&11\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&2&-3\\0&2&-1&1&-2&7\\0&1&0&-3&-3&4\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&2&-3\\0&1&0&-3&-3&4\\0&2&-1&1&-2&7\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&2&-3\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&-1&7&4&-1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&2&-3\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_2]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&3&0\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{array}\right).
$$

可知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$
\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}5&3&0\\-3&-3&4\\-7&-4&1\end{pmatrix}.
$$

Example 10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 显然 $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵. 视 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 即

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).
$$

故求解矩阵方程 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 等价于求解 3 个线性方程组

$$
\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{A\beta}_2=\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{A\beta}_3=\boldsymbol{e}_3.
$$

其中 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是它们对应的齐次线性方程组.

$$
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&0&5&4&12&-3\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right),
$$

(I) 故

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},
$$

得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$
\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=2x_4,\\x_3=3x_4.\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=2x_4,\\x_3=3x_4,\\x_4=x_4.\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}.
$$

得到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(II) 由

$$
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{e}_1)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right),
$$

得 $\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{e}_1$ 的通解为

$$
\boldsymbol{\beta}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1+2\\2c_1-1\\3c_1-1\\c_1\end{pmatrix},\quad c_1\in\mathbb{R}.
$$

同理可知, $\boldsymbol{A\beta}_2=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{A\beta}_3=\boldsymbol{e}_3$ 的通解分别为

$$
\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-c_2+6\\2c_2-3\\3c_2-4\\c_2\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-c_3-1\\2c_3+1\\3c_3+1\\c_3\end{pmatrix},\quad c_2,c_3\in\mathbb{R}.
$$

故满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不同：这里的矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不是有唯一解，而是有无穷多解.

求解方法：转化为多个线性方程组的求解.

这类题目的要点：明白矩阵方程和一般的线性方程组之间的关系.

Example 11. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(1) 问 a,b,c 为何值时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$?

(2) 求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的全部解.

解： (1) 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

可知当 $a=1,\ b=1,\ c=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 由 (1) 知当 $a=1,b=1,c=1$ 时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ (k_1 为任意常数).

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_2 \\ 1-k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$ (k_2 为任意常数).

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_3 \\ -1-k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$ (k_3 为任意常数).

故所求矩阵方程的通解为:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & 1-k_3 \\ -k_1 & 1-k_2 & -1-k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数. □

Example 12. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

解: (I) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一列展开得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(II) 因 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解的必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 $1 - a^4 = 0$. 又 a 为实数, 故 $a = 1$ 或者 $a = -1$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 由

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 - r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 + r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

出现矛盾方程, 故方程组无解. (2) 当 $a=-1$ 时, 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4+r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_4-r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故 $a=-1$ 时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 且通解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad c\in\mathbb{R}.$$

另解: 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-ar_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+a^2r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-a^3r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right)$$

故 $1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$, 即 $a=-1$ 时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解. 此时 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 初等行变换的结果为 $\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$, 得到如前述的通解. $\square$

4 矩阵及向量组的秩

矩阵及向量组的秩

(1) 求矩阵的秩及最高阶非零子式;

(2) 矩阵秩的性质;

(3) 判定向量组的线性相关性;

(4) 求向量组的秩, 极大无关组及线性表示式.

求矩阵的秩

Example 13. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

解: 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3$$

所以当 $(k+3)(k-1)^3\neq 0$, 即 $k\neq -3$ 且 $k\neq 1$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$.

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=-16\neq 0.$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$.

另解: 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-kr_1]{r_2-r_1,r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_3]{r_4+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & (1-k)(3+k) \end{pmatrix}$$

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k) \neq 0$, 即 $k \neq 1$ 且 $k \neq -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 4$.

(2) 当 $k = -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$.

(3) 当 $k = 1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$.

关于矩阵的秩的证明

Example 14. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AB}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

同理可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}] = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n$.

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n$, 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = n.$$

又因为 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

同理可得: $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证法三: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AB}$.

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$, 又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})$, 故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

Example 15. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆.

又 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{AB}$, 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆, 所以 $-\boldsymbol{AB}$ 也可逆, 即 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 可逆.

因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1},$$

且 $\boldsymbol{A}^{-1}, (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}), \boldsymbol{B}^{-1}$ 都可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆.

求向量组的秩、极大无关组、线性表示式

Example 16. 已知向量组 $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2), \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3), \boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4), \boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1, r_5-2r_1]{r_2+2r_1, r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵, 再对矩阵进行初等行变换.

2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果: 非零行的行数即为所求的秩, 每个非零行的非零首元所在列即为极大无关组.

求抽象的向量组的秩

Example 17. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}$

$=(m-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{m-1}(m-1)\neq 0$. 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩相等, 为 r.

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2&=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{\alpha}_m&=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_m.\end{aligned}$$

即向量组向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价, 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r.

线性相关性的判定

Example 18. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, 已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是否线性相关? 为什么?

解: 因为 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n$.

从而得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

5 带参数的线性方程组解的讨论

带参数的线性方程组解的讨论

Example 19. 设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - \lambda r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 4 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & \lambda(1 - \lambda) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 4 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & \lambda(1 - \lambda) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 4 - \lambda \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & 4 - \lambda^2 \end{array}\right)$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 此时方程组有唯一解.

(2) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0$ 且 $4 - \lambda^2 \neq 0$, 即 $\lambda = 1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 此时方程组无解.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 4 - \lambda \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & 4 - \lambda^2 \end{array}\right)$$

(3) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0$ 且 $4 - \lambda^2 = 0$, 即 $\lambda = -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$, 此时方程组有无穷多解, 因为

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$ 取 $x_3 = k$, 得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k-2 \\ k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (k\text{为任意常数}).$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 由 $\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$
$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 所以方程组无解.

(3) 当 $\lambda = -2$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可知同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$ 取 $x_3 = k$, 得方程组的通解为

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (k-1, k-2, k)^{\mathrm{T}} = k(1,1,1)^{\mathrm{T}} + (-1,-2,0)^{\mathrm{T}} (k\text{为任意常数.})$$

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件 (系数矩阵为方阵) 及其理论依据 (克拉默法则).

如果使用初等变换的方法 (第一种方法), 一定要避免参数作分母的情况.

Example 20. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: 由条件可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$, 而

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

所以有: $\begin{cases}\lambda-1\neq 0\\ 1-\lambda^2=0\\ a-\lambda+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ a=-2\end{cases}$

此时

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是方程组的通解为 $\begin{cases}x_1=k+\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{1}{2}\\ x_3=k\end{cases}$ (k 为任意常数).

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$, 即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时, 第二个方程为 $0=1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

当 $\lambda=-1$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$$

由条件知: $a=-2$, 且由上述最简形矩阵可知方程组的通解为

$$x_1=k+\frac{3}{2}, x_2=-\frac{1}{2}, x_3=k(k\text{为任意常数.})$$

6 向量空间与线性变换

向量空间与线性变换

(1) 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;

(2) 内积, Schmidt 正交化方法, 正交矩阵的定义及判定;

(3) 线性变换的定义;

(4) 线性变换在给定基下的矩阵及同一线性变换在不同基下的矩阵间的关系.

过渡矩阵及线性变换的矩阵

Example 21. 设 $\mathbb{R}^3$ 的三组基分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$
且线性变换 T 把基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 映到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.

(1) 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵;

(3) 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;

(4) 求 $T\big(T(\boldsymbol{\alpha}_1)\big)$.

解: (1) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$ 可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} =& (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B},$$

而 $(T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 所以

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 于是 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,0,2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$, 所以

$$T(T(\boldsymbol{\alpha}_1))=T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=T(\boldsymbol{\alpha}_1)+T(\boldsymbol{\alpha}_3)=(1,0,2)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}=(2,0,2)^{\mathrm{T}}.$$

Example 22. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解: (I) 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-kr_1}\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=4\neq0,$$

得证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 由

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \text{即}\quad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0. \tag{1}$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (1) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=-k=0.$$

将 $k=0$ 代入齐次方程组 (1), 解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad c\neq0,c\in\mathbb{R}.$$

故所求向量为 $\boldsymbol{\xi}=c\boldsymbol{\alpha}_1-c\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 c 为非零常数. □

7 相似矩阵及二次型

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;
2. 特征值与特征向量的性质;
3. 判断矩阵是否能对角化; 实对称矩阵的对角化;
4. 二次型的矩阵, 二次型的秩;
5. 二次型化标准形 (重点掌握正交变换法);
6. 二次型 (矩阵) 的正定性的判定.

判定能否对角化

Example 23. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解: $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&5&5\\0&4-\lambda&3\\0&a&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)-3a]=(1-\lambda)[\lambda^2-6\lambda+8-3a]$.

如果 $\lambda=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1-6+8-3a=0\Rightarrow a=1.$$

此时 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=(1-\lambda)[\lambda^2-6\lambda+5]=(1-\lambda)^2(5-\lambda)$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&5&5\\0&3&3\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量有 2 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

如果 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而 $8-3a=9\Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$. 此时 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=(1-\lambda)(\lambda-3)^2$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$.

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-2&5&5\\0&1&3\\0&-\dfrac{1}{3}&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&5&5\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 3 的线性无关的特征向量只有 1 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

Example 24. 证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 必可以对角化, 故 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&\cdots&0&-1\\0&\cdots&0&-2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&\lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda=0$ 时, 方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

故 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$, 得证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$. □

Example 25 (2015 年 7 月期末试题). 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}\triangleq\mathrm{diag}(1,2,-3).$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3-7\boldsymbol{\Lambda}+5\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

而

$$\boldsymbol{\Lambda}^3-7\boldsymbol{\Lambda}+5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1-7+5&0&0\\0&8-14+5&0\\0&0&-27+21+5\end{pmatrix}=-\boldsymbol{I}.$$

故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{I}$. □

Example 26. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值, 又由公式 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$, 知

$$\begin{cases} 0+3+a=1+b+1, \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4$, $b=5$.

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 为计算方便, 可以先转向求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-b & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(3,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 由

$$5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

所以

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

判定能否对角化

Example 27. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&k&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵, 且正交矩阵 Q 不唯一.

(2) 当 $k=0$ 时, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(1-\lambda)$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量只有一个, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

求实对称矩阵的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$

Example 28. 已知 $1,1,-1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

(1) 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量? 若能, 试求出该特征向量, 若不能, 则说明理由.

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之, 若不能则说明理由.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量是正交的, 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_3=(k,-k,0)^{\mathrm{T}}(k\neq0)$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,1,-1)\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \div (-1)]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, 于是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二次型及其标准形

Example 29. 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$ 相似. 相似的矩阵有相同的特征多项式, 从而

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ a & 1-\lambda & b \\ 1 & b & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

$$\begin{cases} 2 - a^2 - b^2 = 2, \\ (a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

故 $a = b = 0$. □

Example 30. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故 $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 同理 $(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

从而 $f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$. 又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$, 得证二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是两两正交的单位向量, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1,\quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1.$$

同样地, $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间也有类似的表达式, 比如

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=0,\quad \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=0.$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\\
=&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\
=&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\
=&\begin{bmatrix}2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\0\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \qquad \begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1,\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0,\\&\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1,\\&\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0.\end{aligned}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得证 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$. □

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 \leqslant 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 2, 1, 0. 证毕. □

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, 见教材 P.153 习题 63: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 证明:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

(2) 由 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 故 $\left|\boldsymbol{A}\right| = 0$, 则 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

Example 31. 设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;

(4) 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

$$\begin{cases} -a = a - b, \\ 2b - 1 = c - 2, \\ 2 - c = -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ c = 5. \end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 故二次型的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3.$$

(2)

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & -3 \\ 3 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)[18-9\lambda+\lambda^2-18]=(4-\lambda)\lambda(\lambda-9).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_1]{r_3\div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1$ $(k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2=4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2=4$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2$ $(k_2\neq 0)$.

当 $\lambda_3=9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_1]{r_3\div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+4r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3=9$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$ $(k_3\neq 0)$.

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形

$$f=4y_2^2+9y_3^2.$$

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1,y_2,y_3)=4y_2^2+9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\|=1$ 下的最值, 因为

$$0\leqslant 4y_2^2+9y_3^2\leqslant 9,$$

故所求的最大值为 9, 最小值为 0. □

Example 32. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$ $(b>0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{pmatrix}$, 由题设可得:

$$\begin{cases}a+2-2=1,\\ -12=\begin{vmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{vmatrix}=2(-2a-b^2).\end{cases}$$

故 $a=1$, $b=2$.

(2) 略. □