# Chapter 3
# 线性方程组

Linear Algebra

November 24, 2017

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

3.1

## 目录



3.2

### 为什么要讨论向量?

本章的题目是 “线性方程组”, 但是先要讲的是 “向量” 这个话题. 为什么?

主要意义: 代数与几何相结合. 用几何的观点理解、表达代数.

比如线性方程组的问题, 等同于 “向量的线性表示” 的问题. 例如, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 23. \end{cases}$$

可以等价地表示为

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

这相当于讨论向量 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix}$ 能否由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ 3.3
线性表示.

易得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. 即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 并且线性表示的系数分别是 2, 3, 1. 即

$$\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3.$$

3.4

## 阅读 & 思考

阅读本章, 请注意思考两个重要问题:

- 什么是极大无关组?
- 秩的本质是什么?

概略地说, 这两个概念要结合几何意义去理解.

极大无关组相当于坐标系. 例如在三维空间取定 10 个非零向量, 假设它们都在同一个平面内, 那么在这些向量中随便找两个不共线的向量, 就可以线性表示余下的所有向量. 这两个向量就是一个极大无关组, 它们就像坐标系一样, 可以组合出这个平面内的任意向量.

这个极大无关组中所含向量的个数, 就是这 10 向量的秩. 其本质是这 10 个三维向量所能构成的子空间的维数. 它们都在一个平面上, 最多只能构成一个 2 维子空间.

矩阵的秩, 表面上是高斯消元法过程中, 最后剩下的非零行的行数.

**矩阵的秩, 其本质是: 矩阵的行向量 (或者列向量) 所张成的子空间的维数.** 或者说, 构成矩阵的向量, 矗立在空间中, 它们所在的子空间的最小维数, 就是矩阵的秩. 3.5

## Warning

本章还将学习全书最重要的结论: 线性方程组解的结构.

另外要非常熟悉以下知识点:

(1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件; 有非零解的充要条件.

(2) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解、有唯一解、有无穷多解的充要条件. 3.6

## 1 $n$ 维向量及其线性相关性

**Definition 1** ($n$ 维向量)**.** 数域 $F$ 上的 $n$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组, 称为数域 $F$ 上的一个 $n$ 元向量, 简称 $n$ 维向量, 记作

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

其中 $a_i$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 $i$ 个分量.

- 当 $F$ 取 $\mathbb{R}$ 时, $\boldsymbol{\alpha}$ 为实向量;
- 当 $F$ 取 $\mathbb{C}$ 时, $\boldsymbol{\alpha}$ 为复向量.

本课程一般只讨论实向量. 3.7

$n$ 维向量可以写成一行,

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

也可以写成一列,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

分别称为行向量和列向量, 也就是行矩阵和列矩阵, 并规定行向量和列向量都按矩阵的运算规则进行运算. 3.8

因此, $n$ 维列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

与 $n$ 维行向量

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

是两个不同的向量. 3.9

数域 $F$ 上的全体 $n$ 元向量组成的集合, 记作 $F^n$, 称为数域 $F$ 上的 $n$ 维向量空间.

例如 $n$ 维实向量的全体组成的集合为

$$\mathbb{R}^n = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\right\},$$

$\mathbb{R}^n$ 叫做 $n$ 维实向量空间. 3.10

**Definition 2.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n$, $k_i \in F$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 在数域 $F$ 上一个线性组合. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的所有线性组合构成的集合称为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的张成 (span). 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的张成记为 $\operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

**Definition 3.** 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$, 如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 使

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示 (或线性表出).

3.11

### 线性方程组的又一个等价表达

设有线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵. 记

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

即线性方程组可等价地表为

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}.$$

☞ 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 等价于方程组

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$$

有解.

3.12

例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})^{\mathrm{T}}$, 则

$$\begin{aligned} & x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + x_3 \boldsymbol{\alpha}_3 \\ = {} & x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + x_3 \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{b}$$

等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4. \end{cases}$$

☞ 方程的个数 = 向量的维数. $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是行向量时, 结果完全相同. 3.13

**Definition 4.** 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$, 若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}, \tag{1}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 (linearly dependent); 否则, 称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 (linearly independent). 3.14

由定义立即可得:

**Theorem 5.** *向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 等价于齐次方程组*

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

*有非零解.*

*向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 等价于齐次方程组*

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

*只有零解.* 3.15

对于只含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组, 若存在 $k \neq 0$, 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须 $k = 0$.

☞ 当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关. 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 3.16

**Theorem 6.** *向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ $(m \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示.*

**证:** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3 \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

于是

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

而 $-1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$ 不全为零, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 3.17

## 证明线性无关的方法

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的最基本方法: 说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解.

也常常表述为: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

然后说明上式成立, 只能有唯一的选择: $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$. 3.18

*Example* 7. 设 $n$ 维向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),$$

即第 $i$ 个分量为 1, 其余分量为 0, 则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

**证:** 设

$$x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}.$$

即

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{0},$$

故只能有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. 得证 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关. □ 3.19

$n$ 维向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为基本向量.

$F^n$ 中任何向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都可以由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

这和 $\mathbb{R}^3$ 中的基本向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 类似.

☞ 基本向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 在向量空间 $F^n$ 中充当了坐标系的功能. 3.20

*Example* 8. 包含零向量的向量组是线性相关的.

**证:** 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$. 则存在不全为零的数 1, 0, 0, $\cdots$, 0, 使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. □ 3.21

*Example* 9. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关, 则整个向量组也线性相关.

**证:** 不妨设前 $j$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j$ 线性相关, $j \leqslant m$. 则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_j\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0},$$

从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_j, 0, \cdots, 0$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_j\boldsymbol{\alpha}_j + 0\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

得证整个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. □

其逆否命题是: 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则其任一部分向量组都线性无关.

☞ 部分相关, 则整体相关; 整体无关, 则部分无关. 3.22

**Theorem 10.** *任意 $n+1$ 个 $n$ 维向量必线性相关.*

证: 对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$, 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0}.$$

注意到此齐次线性方程组中, 未知量个数为 $n+1$, 而方程个数为 $n$, 故方程组一定有无穷多解, 从而必有非零解.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关. □

☞ 向量的个数 > 向量的维数 $\Longrightarrow$ 向量组必线性相关. 3.23

**Theorem 11** (⊠)**.** *若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 且表示法唯一.*

证: 设有不全为零的 $k, k_1, \cdots, k_r$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}, \tag{2}$$

则必有 $k \neq 0$. 事实上, 假若 $k = 0$, 则 (2) 式为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 故必有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0.$$

这与 $k, k_1, \cdots, k_r$ 不全为零矛盾. 3.24

从而

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r,$$

即证 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

下证表示法唯一. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种表示:

$$\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_r\boldsymbol{\alpha}_r, \qquad \boldsymbol{\beta} = h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

两式相减得

$$(l_1 - h_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - h_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (l_r - h_r)\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 故必有

$$l_1 - h_1 = l_2 - h_2 = \cdots = l_r - h_r = 0,$$

即 $l_i = h_i, i = 1, 2, \cdots, r$. 得证表示法唯一. □ 3.25

**Corollary 12.** *如果 $F^n$ 中的 $n$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 则 $F^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 且表示法唯一.*

**证:** 由"任意 $n+1$ 个 $n$ 维向量必线性相关", 故 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 由前述定理得到结论成立. □ 3.26

*Example* 13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (2,-3,7)$. 问:

1. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?
2. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示, 求其表示式.

**解:** (1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{3}$$

其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

故齐次方程组 (3) 只有零解. 即证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 3.27

(2) 由"任意 $n+1$ 个 $n$ 维向量必线性相关"知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示式唯一.

设

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2+3r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div 7]{r_2\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$. □ 3.28

*Example* 14 (P.118 例 5). 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 又 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

**证:** 因为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = -\boldsymbol{\beta}_2 + 2\boldsymbol{\beta}_3,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. □ 3.29

**Theorem 15.**
1. *如果一组 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 $m$ 个分量, 所得到的新向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性无关.*
2. *如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 那么它们各去掉相同的若干个分量, 所得的新向量组也是线性相关的.*

**证:** 两者互为逆否命题, 证明第一个即可.

向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

只有零解. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0. \end{cases} \tag{4}$$

3.30

不妨设每个向量增加了一个分量, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i}), \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0},$$

则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0, \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,s}x_s = 0. \end{cases} \tag{5}$$

方程组 (5) 的解全是方程组 (4) 的解.

而方程组 (4) 只有零解, 故方程组 (5) 也只有零解. 得证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*$, $\boldsymbol{\alpha}_2^*$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 线性无关. □ 3.31

设向量组线性相关, 若增加的分量全为零, 则得到的新向量组也线性相关.

事实上, 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 把这些向量各任意添加 $m$ 个全为 0 的分量, 所得到的新向量组记为 $\boldsymbol{\alpha}_1^*$, $\boldsymbol{\alpha}_2^*$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s^*$.

此时方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同. 所以新向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*$, $\boldsymbol{\alpha}_2^*$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性相关. □

☞ 总之, 对应位置全为 0 的分量, 不影响向量组的线性相关性. 3.32

*Example* 16. 考察下列向量的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**解:** 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

线性无关, 故原向量组线性无关. □ 3.33

## 2 向量组的秩及其极大线性无关组

**Definition 17.** 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在 $r$ 个线性无关的向量, 且其中任一个向量都可以由这 $r$ 个线性无关的向量线性表示, 则数 $r$ 称为向量组的秩 (rank), 记作

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r.$$

或

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 当且仅当

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s.$$

只含有零向量的向量组的秩为 0. 只含有一个非零向量的向量组的秩为 1. 3.34

**Definition 18.** 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 中的每一个向量可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 就称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 如果两个向量组可以互相线性表示, 则称这两个向量组是等价的.

向量组的线性表示, 具备:

- 自反性. 即向量组自己可以线性表示自己.
- 传递性. 设向量组 $A$ 可以被向量组 $B$ 线性表示, 向量组 $B$ 又可以被向量组 $C$ 线性表示, 则向量组 $A$ 可以被向量组 $C$ 线性表示.

但不具备对称性. 即: 向量组 $A$ 可以被向量组 $B$ 线性表示, 不一定有向量组 $B$ 可以被向量组 $A$ 线性表示. 3.35

向量组的等价, 具备:

1. 自反性: 任一向量组和自身等价.
2. 对称性: 向量组 $A$ 与向量组 $B$ 等价, 当然向量组 $B$ 与向量组 $A$ 等价.
3. 传递性: 设向量组 $A$ 与向量组 $B$ 等价, 向量组 $B$ 又与向量组 $C$ 等价, 则向量组 $A$ 与向量组 $C$ 等价.

3.36

☞ 部分总可以由整体线性表示; 但反之不成立.

例如设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的前 $t$ 个向量, $t \leqslant s$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 3.37

**Theorem 19.** *如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关.*

证: 比如, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 记

$$\boldsymbol{\beta}_1 = k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{21}\boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = k_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = k_{13}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0},$$

则

$$(x_1k_{11} + x_2k_{12} + x_3k_{13})\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1k_{21} + x_2k_{22} + x_3k_{23})\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}. \tag{6}$$

无论 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关或线性无关, 只要

$$\begin{aligned} x_1k_{11} + x_2k_{12} + x_3k_{13} = 0, \\ x_1k_{21} + x_2k_{22} + x_3k_{23} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

都可以使 (6) 成立. 而线性方程组 (7) 中未知量个数 3 大于方程个数 2, 故有无穷多解, 故存在非零解. 得证 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. 3.38

**Corollary 20.** 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 且 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关, 则 $t \leqslant s$.

**Corollary 21.** 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的.

证: 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 $r$ 个线性无关的向量, 由于该向量组中任一个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 所以其中任何 $r+1$ 个向量都线性相关. □ 3.39

**Definition 22** (向量组的秩的另一个定义 & 极大线性无关组)**.** 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$. 如果在其中能选出 $r$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 满足

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关,

那么称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是原向量组的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

极大线性无关组所含向量个数 $r$, 则称为原向量组的秩.

极大无关组也常常称为最大无关组.

☞ 极大无关组和原向量组是等价的.

极大无关组是原向量组的全权代表. 3.40

**Corollary 23.** 设

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r, \qquad \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p,$$

如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 则

$$r \leqslant p.$$

**证:** 不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 分别是两个向量组的极大无关组.
由线性表示的传递性知, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表示.
而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 故

$$r \leqslant p.$$

☞ 等价向量组的秩相等. 3.41

## 3 矩阵的秩 相抵标准形

本节将得到一个重要的结果: 初等变换不改变矩阵的秩. 3.42

**Definition 24** (行秩 & 列秩)**.**
- 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 把它的每一行称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个行向量. 把 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩.
- 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 把它的每一列称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个列向量. 把 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

☞ 对 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,

- $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $\leqslant m$;
- $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $\leqslant n$. 3.43

☞ 结论: 阶梯形矩阵的行秩等于列秩, 其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数.
例如阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{11} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{34} \neq 0$. $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $= 3$, 列秩 $= 3$. 事实上, 把 $\boldsymbol{A}$ 按行和列分块为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5).$$

下证 $a_{11}$, $a_{23}$, $a_{34}$ 所在的行, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关; 它们所在的列, 即 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 也必线性无关. 3.44

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1\big(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\big) + x_2\big(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}\big) + x_3\big(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}\big) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

对比第一个分量, 得

$$x_1 a_{11} = 0,$$

而 $a_{11} \neq 0$, 故 $x_1 = 0$. 从而

$$x_2\big(0,0,a_{23},a_{24},a_{25}\big) + x_3\big(0,0,0,a_{34},a_{35}\big) = (0,0,0,0,0).$$

对比第 3 个分量, 得

$$x_2 a_{23} = 0,$$

而 $a_{23} \neq 0$, 故 $x_2 = 0$. 从而

$$x_3\big(0,0,0,a_{34},a_{35}\big) = (0,0,0,0,0).$$

同理得 $x_3 = 0$. 得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 3.45

又 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$, 而零向量 $\mathbf{0}$ 可以由任何向量组线性表示, 这里

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组. 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 3.

(2) 设

$$y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_3\boldsymbol{\beta}_3 + y_4\boldsymbol{\beta}_4 = \mathbf{0}.$$

即

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对比第 3 个分量, 得 $y_4 = 0$. 从而 3.46

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对比第 2 个分量, 得 $y_3 = 0$. 从而

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对比第 1 个分量, 得 $y_1 = 0$. 故 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关. 3.47

去掉向量组 $B$: $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$, $\boldsymbol{\beta}_5$ 的最后一个分量, 所得的新向量记为 $B^*$: $\boldsymbol{\beta}_1^*$, $\boldsymbol{\beta}_2^*$, $\boldsymbol{\beta}_3^*$, $\boldsymbol{\beta}_4^*$, $\boldsymbol{\beta}_5^*$. 注意到去掉的分量全为 0, 故这两个向量组的线性相关性是一致的.

由 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1^*$, $\boldsymbol{\beta}_3^*$, $\boldsymbol{\beta}_4^*$ 也线性无关.

因任意 4 个 3 维向量必线性相关, 故 $\boldsymbol{\beta}_1^*$, $\boldsymbol{\beta}_3^*$, $\boldsymbol{\beta}_4^*$ 为向量组 $B^*$ 的极大无关组, 即向量组 $B^*$ 中任何一个向量都可以由 $\boldsymbol{\beta}_1^*$, $\boldsymbol{\beta}_3^*$, $\boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性表示, 从而向量组 $B$ 中的任何一个向量都可以由 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示 (且表示系数与前者相同).

得证 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 是向量组 $B$ 的极大无关组, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 3. $\square$ 3.48

**Theorem 25.** *初等行变换不改变矩阵的行秩.*

证: 给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 对其进行一次初等行变换, 所得的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$, 下证两矩阵的行秩相等.

记矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$.

(1) 设 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} \boldsymbol{B}$, 因矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量仍然是 $\boldsymbol{A}$ 的 $m$ 个行向量, 故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩.

(2) 设 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i\times c} \boldsymbol{B}$, 其中 $c\neq 0$. 因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价, 故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩.

(3) 设 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i+cr_j} \boldsymbol{B}$. 因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i + c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价, 故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩.

得证初等行变换不改变矩阵的行秩. □ 3.49

**Theorem 26.** *初等行变换不改变矩阵的列秩.*

证: 设

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = \boldsymbol{B},$$

在 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 中相同位置任意取某 $s$ 个列向量:

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s}, \qquad \text{和} \qquad \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s}.$$

分别记为向量组 $A^*$ 和向量组 $B^*$. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s} = \mathbf{0}. \tag{9}$$

注意到方程组 (9) 是由方程组 (8) 经过高斯消元法得到 (*其步骤相同于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换得到 $\boldsymbol{B}$ 的过程*), 故两方程组同解. 即向量组 $A^*$ 和向量组 $B^*$ 有完全相同的线性关系. 得证矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 列秩相等 (*列向量的极大无关组在相同位置产生*). □ 3.50

*Example* 27. 设向量组: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,3,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (2,5,-1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = (1,-1,3,-1)^{\mathrm{T}}$. 试求向量组的秩及一个极大无关组, 并将其余的向量用这个极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)$, 由

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \div (-2)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1 - 2r_4 \\ (r_2 - r_4) \div 2}]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得秩为 3, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 构成一个极大无关组, 且 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$. □ 3.51

同理, 初等列变换不改变矩阵的行秩和列秩.

**Theorem 28.** *初等变换不改变矩阵的行秩和列秩.*

**Theorem 29.** *矩阵的行秩等于其列秩.*

证: 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换得到阶梯矩阵 $\boldsymbol{U}$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\text{ 的行秩} &= \boldsymbol{U}\text{ 的行秩} \\ &= \boldsymbol{U}\text{ 的列秩} = \boldsymbol{A}\text{ 的列秩}. \end{aligned}$$

**Definition 30** (矩阵的秩)**.** 矩阵的行秩或列秩的数值, 称为矩阵的秩. 记作

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \qquad \text{或} \qquad \mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \qquad \text{或} \qquad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}).$$

3.52

**Definition 31.** 对 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 若

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵. 否则, 称为降秩矩阵.

**Theorem 32.** *下列表述等价:*

- $\boldsymbol{A}$ *为满秩矩阵.*
- $\boldsymbol{A}$ *为可逆矩阵.*
- $\boldsymbol{A}$ *为非奇异矩阵.*
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

反之, $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵 $\Longleftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}| = 0$. 3.53

证: 只需证明前两个表述等价.

设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$, 记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 有 $n$ 个非零行, 由行简化阶梯形矩阵的结构, 知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{I}.$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$, 得证 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 记 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_0$, 则

$$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

即 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可以得到 $\boldsymbol{I}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n$. □ 3.54

☞ (1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

(2) 对任意的非零矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant 1$. 3.55

**Definition 33.** 在 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, 任取 $k$ 行与 $k$ 列 ($k \leqslant m$, $k \leqslant n$), 位于这些行列交叉处的 $k^2$ 个元素, 不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得的 $k$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶子行列式, 简称 $k$ 阶子式.

- 当 (10) 式等于零时, 称为 $k$ 阶零子式; 否则, 称为 $k$ 阶非零子式.
- 当 (10) 式的 $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \cdots, j_k = i_k$ 时, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶主子式.

3.56

*Example* 34. 在 $5 \times 6$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

中, 取某 3 行、某 3 列, 得到 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

3.57

若取第 2, 4, 5 行, 第 2, 4, 5 列,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

得到 3 阶主子式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

3.58

**Definition 35.** 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 $r$ 阶的非零子式 $D$, 且所有 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 全等于 0, 则 $D$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式.

☞ 若所有 $r+1$ 阶子式全等于 0, 则所有 $r+2$ 阶子式 (如果存在的话) 全等于 0. (行列式按一行展开即得.) 从而, 所有阶数高于 $r+1$ 的子式全为 0. 3.59

**Theorem 36.** $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 $r$.

证: 必要性. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 $r$. 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r$ 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 $r$, 其列秩也为 $r$; 不妨再设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 $r$ 个列向量线性无关. 则 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $r$ 阶子式为非零子式. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式 (因为其中有一行可以由其余 $r$ 行线性表示), 因此, $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 $r$.

充分性. 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $r$ 阶子式 $|\boldsymbol{A}_r|\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A}_r$ 可逆, 其 $r$ 个行向量线性无关, 将它们添加分量成为 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r$ 个行向量, 它们也线性无关; 而 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个行向量必线性相关 (否则由必要性的证明可知 $\boldsymbol{A}$ 中存在 $r+1$ 阶非零子式, 这与题设矛盾), 故 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$. □

☞ 此定理可以作为矩阵秩的另一个定义. 3.60

矩阵秩的性质 ⊠

**性质 0** $\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 特别地, 当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}$ 为非零列向量时, 有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1.$$

即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{cases}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), & \text{当且仅当 } \boldsymbol{b} \text{ 可以被 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性表示;}\\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1, & \text{当且仅当 } \boldsymbol{b} \text{ 不能被 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性表示.}\end{cases}$$

3.61

例如, 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$,

(1) 取 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, 则

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)}\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{0}),$$

故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

3.62

(2) 取 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 则

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right),$$

$\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1.$$

3.63

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表出, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),\tag{11}$$

同理 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 所以

$$\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2,\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2,\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s).$$

3.64

而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 的秩不可能超过其向量的个数 $r+s$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).\tag{12}$$

得证 $\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. □

**注**

- 对 (11) 式的朴素理解是, 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列, 只会有可能使秩在原来的基础上得到增加; 当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出时, 等号成立.
- 对 (12) 式的朴素理解是, 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, 有可能 $\boldsymbol{A}$ 的列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量出现线性相关, 合并为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的秩一般会比 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 要小. 当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 两者列向量的极大线性无关组线性无关时, (12) 式的等号成立. 更极端的情形是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

3.65

此性质还可以写成

$$\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\leqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

上式第一个不等号也是说明: 给一个矩阵添加行, 有可能使得矩阵的秩增加. 3.66

**性质 1** $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表出, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

得证

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).\tag{13}$$

☞ 注意 (12) 式、(13) 式的右侧都是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 就是说把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合并、相加, 只可能使秩得以减少. 3.67

**性质 2** $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$.

**证:** 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 事实上, 设

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

知矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 1 列为 $b_{11}\boldsymbol{a}_1+b_{21}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{m1}\boldsymbol{a}_m$, ..., 第 $s$ 列为 $b_{1s}\boldsymbol{a}_1+b_{2s}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{ms}\boldsymbol{a}_m$.

矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可以被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

类似地, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的线性组合, 有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 得证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$. □ 3.68

☞ 从这个性质及 P.121 推论 3 得到的共同理解是: 对一个向量组进行线性组合, 可能会使向量组的秩减小.

**注** ⊠

这是一个非常重要的认识:

- 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合.
- 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的线性组合.

3.69

**性质 3** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别是 $m$ 阶、$n$ 阶可逆矩阵, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{PA}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AQ}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{PAQ}).$$

**证:** 可逆矩阵可以分解为若干个初等矩阵的乘积, 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵, 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行若干次初等行变换, 但初等变换不改变矩阵的秩, 故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{PA}).$$

同理得其他等号成立. □ 3.70

*Example* 37 (例 2). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $m<n$, 证明: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$.

**证:** 由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \min\{m,n\} < n$, 由性质 2 有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\} < n,$$

而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵, 故 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$. □ 3.71

## 相抵标准形

**Definition 38.** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化为 $\boldsymbol{B}$ (或: 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$), 则称 $\boldsymbol{A}$ 相抵于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

☞ 或者称 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$, 记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

相抵关系满足:

1. 反身性: $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$.
2. 对称性: 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$.
3. 传递性: 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

☞ 相抵是一种等价关系. 3.72

**Theorem 39.** *若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 则一定存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{n\times n}$, 使得*

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}_{m\times n}\triangleq\boldsymbol{U}, \tag{14}$$

*其中 $\boldsymbol{I}_r$ 为 $r$ 阶单位矩阵.*

**证:** 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 化为有 $r$ 个非零行的行简化阶梯矩阵 $\boldsymbol{U}_1$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1.$$

再对 $\boldsymbol{U}_1$ 做初等列变换, 可化为 (14) 式右端的矩阵 $\boldsymbol{U}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{U}.$$

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$, 则有 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}_{m\times n}=\boldsymbol{U}$. □ 3.73

**Definition 40.** 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$, 则矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形, 简称标准形.

**注** △

- 秩相等的同型矩阵, 必有相同的标准形.
- 两个秩相等的同型矩阵是相抵的.

3.74

*Example* 41. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

**解:** 先求 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 为此对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换变成行阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-r_4,r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_4-r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

3.75

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

再求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式. 因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 知 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式为 3 阶.

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$, 其阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

中取第一、二、四列, 记为矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{A}_0=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 则

$$\boldsymbol{A}_0\cong\boldsymbol{B},$$

3.76

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_0)=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$. 在

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}$$

取第二、三、四行构成的行列式必不为零.

$$\begin{vmatrix}3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+3r_1}\begin{vmatrix}3&-2&6\\2&0&5\\10&0&17\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&5\\10&17\end{vmatrix}=28\neq 0.$$

因此这个子式便是 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式. □

☞ 答案显然不唯一. 比如可以在矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5)$, $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 中找到 3 阶非零子式. 3.77

## MATLAB 计算矩阵的秩

MATLAB 中使用命令 rank(A) 即可以得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

```
A =

   3   2   0   5   0
   3  -2   3   6  -1
   2   0   1   5  -3
   1   6  -4  -1   4

>> rank(A)

ans =

   3
```

图 1: MATLAB 中里面由 rank(A) 得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

3.78

## 矩阵秩的求法

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 得到阶梯型矩阵, 其非零行的行数, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 秩.

当然也可以使用初等列变换, 或者行变换、列变换穿插进行.

例如教材 P.148 习题 20:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.79

可见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 其一个最高阶的非零子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.80

## 4 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

齐次线性方程组是天然有解的: $(0,0,\cdots,0)$ 就是它的一组解, 即零解. 所以对于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 不存在无解的情况, 我们关心的是: 它是否有零之外的解; 若有, 又如何表达这些解.

设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵.

使用高斯消元法, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换, 不失一般性，设其行简化阶梯型矩阵为:

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}, \text{或 } \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}, \tag{15}$$

$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n$. 3.81

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 行简化阶梯型矩阵为 (15) 式中的 $\boldsymbol{V}$. 此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有唯一解, 即零解.

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 行简化阶梯型矩阵为 (15) 式中的 $\boldsymbol{U}$. 此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解. 3.82

**Theorem 42.** *设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件为*

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n.$$

证: 记 $\boldsymbol{A}=\big(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\big)$, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 可表达为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.$$

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 等价于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\big(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\big)<n.$$

☞ 若 $m<n$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解. 这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵. 3.83

**Corollary 43.** *当 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵时,*

- *$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|=0$.*
- *$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.*

**Corollary 44.** *齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件为: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的列数.*

☞ $\boldsymbol{A}$ 的列数即未知量的个数. 3.84

*Example* 45. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵, 证明: 存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

**证:** $|\boldsymbol{A}|=0$ 等价于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 下证 "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解" 等价于 "存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$".

(1) 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 又 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个列向量 $\boldsymbol{\beta}_i\neq\boldsymbol{0}$, 从而方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 至少有一个非零解 $\boldsymbol{\beta}_i$.

(2) 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 任取其一个非零解 $\boldsymbol{\beta}$, 令

$$\boldsymbol{B}=\big(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}\big),$$

则 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. □ 3.85

## 齐次线性方程组解的性质

**Theorem 46.** *若 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解, 则*

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2\qquad(k_1,\ k_2\ \text{为任意常数})$$

*也是它的解.*

**证:** 因为

$$\boldsymbol{A}\big(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2\big)=k_1\boldsymbol{Ax}_1+k_2\boldsymbol{Ax}_2=k_1\boldsymbol{0}+k_2\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.$$

故 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. □ 3.86

**Definition 47.** 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量, 如果:

1. $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 线性无关;
2. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一个解向量可由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 线性表示,

则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

☞

- 基础解系即全部解向量的极大无关组.
- 找到了基础解系, 就找到了方程组的全部解: $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$, ($k_1$, $k_2,\cdots,k_p$ 为任意常数).
- 基础解系不唯一. 3.87

*Example* 48. 设线性方程组只含有一个方程

$$x+y+z=0.$$

求方程组的解.

**解:** (1) 选取 $y$, $z$ 为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x=-y-z,\\ y=\quad y,\\ z=\qquad\ z.\end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$c_1$, $c_2$ 为任意常数. 3.88

(2) 选取 $x$, $z$ 为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x = \quad x, \\ y = -x - z, \\ z = \qquad\quad z. \end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$c_1$, $c_2$ 为任意常数.

(3) 选择 $x$, $y$ 为自由未知量. (略)

上述得到 3 个不同的基础解系:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

一般地, 对方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 将 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 不失一般性，设有行最简形 3.89
矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

则原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

3.90

等价于

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - c_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - c_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - c_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{rn}x_n, \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ x_{r+2} = x_{r+2}, \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

视 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为**自由未知量**. 3.91

等价于

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1}\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2}\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.92

等价于

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-r}\begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.93

全书最重要的结论

**Theorem 49** (☆). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 存在基础解系, 且基础解系含 $n - r$ 个解向量.

**"$n - r$" 的含义**

- $r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯型矩阵的非零行的行数, 是非自由未知量的个数. (非自由未知量一般取自非零行的第一个非零元所对应的未知量, 一个非零行只能确定一个非自由未知量.)

- $n$ 是未知量的总数, 所以 $n-r$ 是自由未知量的个数. 有多少个自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量. 3.94

*Example* 50. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0. \end{cases}$ 的基础解系.

**解:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div 8]{r_2\div 5} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1=-4x_3, \\ x_2=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4, \end{cases}$ 即 3.95

$$\begin{cases} x_1=-4x_3, \\ x_2=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4, \\ x_3=x_3, \\ x_4=x_4. \end{cases}$$

因此基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad 或\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

或者, 由 3.96

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

视 $x_2$, $x_3$ 为自由未知量, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1= \quad -4x_3, \\ x_4=4x_2-3x_3. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1= \quad -4x_3, \\ x_2=x_2, \\ x_3=x_3, \\ x_4=4x_2-3x_3. \end{cases}$$

得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \big(0,1,0,4\big)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \big(-4,0,1,-3\big)^{\mathrm{T}}.$$

3.97

*Example* 51. 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系.

**解:** 原方程即为

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}.$$

或者

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = \qquad\qquad x_2, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad x_{n-1}, \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}. \end{cases}$$

所以基础解系为 3.98

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

3.99

*Example* 52. 写出一个以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

**解:** 把解的形式改写为

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

等价于 3.100

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} x_1 = \quad 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

得一个所求的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

3.101

*Example* 53 (常用性质 ⊠). 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$. 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant n.$$

证: 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ 知, $\boldsymbol{B}$ 的列向量是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩, 不超过 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系的秩. 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

得证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant n$. □ 3.102

*Example* 54. 设 $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 故有相同的基础解系, 基础解系包含的向量个数相等, 即

$$n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

得证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. □

☞ 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则必有 $\boldsymbol{A}$ 的行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量等价, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 3.103

*Example* 55 (有用的结论). 证明 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证: 只需证明齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解.

若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Ax}\right) = \boldsymbol{0}$, 即 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = 0,$$

即

$$\left(\boldsymbol{Ax}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Ax}\right) = 0,$$

故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

综上可知方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解, 因此 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. □

☞ 对 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 若 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$. 3.104

## 5 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

**Theorem 56.** *对于非齐次线性方程组* $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$*, 下列命题等价:*

*(i)* $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ *有解 (或相容);*

*(ii)* $\boldsymbol{b}$ *可以由* $\boldsymbol{A}$ *的列向量组线性表示;*

*(iii) 增广矩阵* $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ *的秩等于系数矩阵* $\boldsymbol{A}$ *的秩.*

证: 先证 (i)⇔(ii). 记 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可等价地表为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解等价于: 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

再证 (ii)⇔(iii). 若向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

反之, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 则向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 否则, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$, 导致矛盾. 3.105

或者, 由性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1,$$

即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{cases}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), & \text{当且仅当 } \boldsymbol{b} \text{ 可以被 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性表示;}\\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1, & \text{当且仅当 } \boldsymbol{b} \text{ 不能被 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性表示.}\end{cases}$$

故 (ii)⇔(iii). □ 3.106

### $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$ 即出现矛盾方程

记 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$, 则增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 经初等行变换所得的行阶梯形矩阵一般形如

$$\left(\begin{array}{cccccc:c}
1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right),$$

其中 $d_{r+1}\neq 0$ (否则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$).

这意味着出现了矛盾方程

$$0=d_{r+1}.$$

这导致方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解. 3.107

*Example* 57. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10, & ① \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 15, & ② \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - 14x_4 = 32, & ③ \\ -3x_1 + 3x_2 \qquad + 11x_4 = -20. & ④ \end{cases}$$

**解:** 将其增广矩阵用初等行变换化为行阶梯型矩阵:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 2 & -2 & -1 & -8 & 15 \\ 4 & -4 & 1 & -14 & 32 \\ -3 & 3 & 0 & 11 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+3r_1]{r_2-2r_1, r_3-4r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

出现矛盾方程 $0 = 7$, 故方程组无解. □ 3.108

- 矛盾方程总可以化为 $0 = 1$.
- 无解的根本原因: 确有方程相互矛盾. 例如, $(② + ③) \div (-2)$, 得

$$-3x_1 + 3x_2 \qquad + 11x_4 = -\frac{47}{2},$$

这与 ④ 矛盾. 3.109

**Corollary 58.** $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *有唯一解的充分必要条件是*

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \text{ 的列数}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的列数 = 未知量的个数.
此时, 增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的经初等行变换所得的行简化阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\not\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. (除非 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. ) 3.110

**Theorem 59.** *若* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ *是* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *的解, 则* $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ *是对应齐次方程组* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ *的解.*

**证:** 因为

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0,$$

故 $x_1 - x_2$ 是 $Ax = 0$ 的解. □ 3.111

**Theorem 60.** *若 $Ax = b$ 有解, 则其一般解 (或称通解) 为*

$$x = x_0 + \overline{x},$$

*其中 $x_0$ 是 $Ax = b$ 的某一个解 (或称特解), 而*

$$\overline{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_px_p$$

*是 $Ax = 0$ 的一般解.*

即 $Ax = b$ 的通解为

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_px_p + x_0,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, $x_0$ 是 $Ax = b$ 的一个特解.

☞ "$Ax = b$ 的通解" = "$Ax = 0$ 的通解" + "$Ax = b$ 的特解". 3.112

*Example* 61. 解线性方程组 $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1. \end{cases}$

**解:** 对方程的增广矩阵实施初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 \div 2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

得到与原方程组同解的方程组 3.113

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}, \\ w = 0. \end{cases} \tag{17}$$

等价于

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 0w + \frac{1}{2}, \\ y = \quad y, \\ z = \quad\quad z, \\ w = \quad\quad\quad 0. \end{cases}$$

等价于

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

所以原方程组的解为 3.114

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $c_1$, $c_2$ 为任意实数.

☞ 熟悉该方法后, 实际解题时, 可以省略 (17) 式和(18) 式这两个步骤. 3.115

*Example* 62. 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 0, \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 - 3x_4 = \ \ 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

**解:** 对增广矩阵进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1 - r_3, r_3 + \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

3.116

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \ \ x_4 + \frac{1}{2}, \\ x_3 = \qquad 2x_4 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \ \ x_4 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = \qquad 2x_4 + \frac{1}{2}. \\ x_4 = \qquad\ \ x_4. \end{cases}$$

故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3.117

*Example* 63 (重要题型★). 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 \qquad\quad + x_2 \qquad\quad + x_3 = 0, \\ \qquad\quad x_1 + (1+\lambda)x_2 \qquad\quad + x_3 = 3, \\ \qquad\quad x_1 \qquad\quad + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda, \end{cases}$$

问 $\lambda$ 取何值时, 此方程组 (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解? 并在有无穷多解时求其通解.

**解:** 由克拉默法则知 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时方程组有唯一解. 又

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ 3+\lambda & 1+\lambda & 1 \\ 3+\lambda & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3+\lambda)\lambda^2.$$

故 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解. 3.118

当 $\lambda = 0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

第 2 个方程与其他方程矛盾, 故方程组无解.

当 $\lambda = -3$ 时, 原方程组的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1, \\ x_2 = x_3 - 2, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

故 $\lambda = -3$ 时, 方程组有无穷多解, 且通解为 3.119

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

☞ 此题考查的是线性方程组解的结构的基本理论, 而该理论是本课程的核心, 故此例题是极重要的题型!

用克拉默法则即可破题. 但此方法只适用于系数矩阵是方阵的情形. 3.120

*Example* 64. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

**证:** (1) 假设 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关.

基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可以由 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 这与 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解矛盾.

所以假设不成立. 即 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关. 3.121

(2) 易知向量组 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 等价.

又由本题 (1) 的结论, $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = n-r+1.$$

所以 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关. □ 3.122

*Example* 65. 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 $s$ 个解, $k_1, \cdots, k_s$ 为实数, 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解.

证: 因为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\eta}_s)\\ =&k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s\\ =&\boldsymbol{b}(k_1+\cdots+k_s) = \boldsymbol{b},\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. □ 3.123

*Example* 66. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 $r$, $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解 (由例题 64 知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1, \tag{19}$$

下证该向量组是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

由

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1),$$

3.124

已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关, 又初等变换不改变向量组的线性相关性, 故向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 线性无关.

从而向量组 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 也线性无关, 又注意到该向量组包含的向量个数为 $n-r$, 故它是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x} = k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1) + k_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1) + \cdots + k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1,$$

整理得

$$\boldsymbol{x} = (1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

记 $k_1 = 1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1}$, 则 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{n-r+1}=1$, 而且

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

3.125

*Example* 67. 设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

**解:** (1) 因为

$$\mathrm{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_4 = \quad x_2; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = \quad x_2, \\ x_3 = \qquad\quad x_3, \\ x_4 = \quad x_2, \end{cases}$$

所以方程组 I 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$ 3.126

由

$$\mathrm{II} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \quad x_2 - x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \quad x_2 - x_3, \\ x_2 = \quad x_2, \\ x_3 = \qquad\quad x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases}$$

所以方程组 II 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 方程组 I 与 II 的公共解, 即联立方程组 I 和 II 所得新方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3.127

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = \quad x_2, \\ x_3 = 2x_2, \\ x_4 = \quad x_2. \end{cases}$$

得方程组 I 与 II 的公共解为

$$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

3.128

*Example* 68. 求四张平面

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{aligned}$$

相交于一点的充分必要条件.

**解:** 四张平面相交于一点的充分必要条件是: 3 元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3, \\ a_4x + b_4y + c_4z = -d_4 \end{cases}$$

有唯一解. 3.129

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \\ -d_4 \end{pmatrix}.$$

则平面相交于一点的充分必要条件是: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$. □

☞ 教材 P.27 例 2 就是上述例题. 但其解答 "充要条件是系数行列式 $D = 0$ 或 $D_3 \neq 0$" 是错误的, 其中

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因为 $D = 0$ 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leqslant 3$. 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 1$ 时, 各平面重合; 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$ 时, 原式约简为直线方程, 即各平面相交于一条直线. 另外, $D_3 \neq 0$ 可以得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 但反之不成立; 且 $D_3 \neq 0$ 得不到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$. 3.130

## 6 习题

**Exercise 69** (P.146 习题 1)**.** 将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

**解:** 设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$, 即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2-x_3-x_4=2,\\x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\x_1-x_2-x_3+x_4=1.\end{cases}$$

3.131

由

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right),$$

得: $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{1}{4}$, $x_3=-\frac{1}{4}$, $x_4=-\frac{1}{4}$. 故

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

3.132

**Exercise 70** (P.146 习题 2)**.** 将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合:

$\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$.

**解:** 设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$, 即

$$\begin{cases}1x_1+2x_2+1x_3+0x_4=0,\\1x_1+1x_2+1x_3+1x_4=0,\\0x_1+3x_2+0x_3-1x_4=0,\\1x_1+1x_2+0x_3-1x_4=1.\end{cases}$$

3.133

由

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&3&0&-1&0\\1&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

得 $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=0$. 故

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

3.134

**Exercise 71** (P.146 习题 4)**.** 判别向量组的线性相关性:

$\boldsymbol{\beta_1} = (1, -1, 2, 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta_2} = (0, 3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta_3} = (3, 0, 7, 14)^{\mathrm{T}}$.

解: 方法一. 观察可以得到 $\boldsymbol{\beta}_3 = 3\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$, 所以向量组线性相关.

方法二. 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{r_2+r_1, r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\} = 2 < 3$, 所以向量组线性相关. 3.135

或者,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-7c_2]{c_1-2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -7 & 3 & -21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\} = 2$. 3.136

**Exercise 72** (P.146 习题 7)**.** 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

证: 设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0}$, 即

$$(k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 - k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 所以只能有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 - k_2 = 0, \end{cases}$$

方程组只有唯一解: $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.

故 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. □ 3.137

**Exercise 73** (P.146 习题 9)**.** 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 易证这两个向量组等价, 故结论成立. □ 3.138

**Exercise 74** (P.147 习题 11)**.** 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 但其中任意 3 个向量都线性无关, 证明必存在一组全不为零的数 $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}.$$

证: 反证法. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 $k_1, k_2, k_3, k_4$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}.$$

假若 $k_1, k_2, k_3, k_4$ 中至少有一个等于零, 不妨假设 $k_1 = 0$, 则

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0},$$

其中 $k_2, k_3, k_4$ 不全为零, 从而得到 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 与题设矛盾.

故 $k_1, k_2, k_3, k_4$ 中没有一个为零. □ 3.139

**Exercise 75** (P.147 习题 12)**.** 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 证明 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

证: (1) 若 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 当然 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

(2) 若已知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

用反证法: 假设 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示 (且表示法唯一). 矛盾. □ 3.140

**Exercise 76** (P.148 习题 17)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $n < m$, 证明齐次线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解.

证: $\boldsymbol{AB}$ 是 $m \times m$ 的矩阵, 而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\} \leqslant n < m.$$

所以方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解. □ 3.141

**Exercise 77** (P.148 习题 18)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 $m$ 行构成的 $m \times n$ 矩阵. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为 $r$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant r + m - s$.

证: 记矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的后 $s - m$ 行, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}.$$

即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{C}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) + s - m.$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant r + m - s$.

或者, 注意到 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组 (即 $\boldsymbol{A}$ 的前 $m$ 个行向量) 的极大无关组与 $\boldsymbol{A}$ 的后 $s - m$ 个行向量所构成的向量组中, 包含了 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的极大无关组, 故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) + s - m \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r,$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant r + m - s$. □ 3.142

**Exercise 78** (P.148 习题 23). 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 证明: 存在非零的 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$.

☞ 对照教材 P.133 例 1: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵, 证明: 存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

证: (充分性). 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 取 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 $s$ 个解 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_s$, 且其中至少有一个 $\boldsymbol{\beta}_j\neq\boldsymbol{0}$, 作矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_s)$, 则 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 且有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_s)=\boldsymbol{0}.$$

(必要性). 设存在非零的 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,s)$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因为 $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵, 所以至少有一个 $\boldsymbol{\beta}_i\neq\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$. □ 3.143

**Exercise 79** (P.149 习题 30). 讨论 $p,q$ 取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(1)\ \begin{cases}(p+3)x_1+x_2+2x_3=p,\\ px_1+(p-1)x_2+x_3=2p,\\ 3(p+1)x_1+px_2+(p+3)x_3=3.\end{cases}$$

解: 系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}p+3&1&2\\p&p-1&1\\3(p+1)&p&p+3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}p+3&1&2\\2p+3&p&3\\3(p+1)&p&p+3\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}p+3&1&2\\2p+3&p&3\\p&0&p\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}\begin{vmatrix}p+1&1&2\\2p&p&3\\0&0&p\end{vmatrix}$$
$$=p(p^2+p-2p)=p^2(p-1).$$

3.144

或者

$$D=\begin{vmatrix}p+3&1&2\\p&p-1&1\\3(p+1)&p&p+3\end{vmatrix}$$
$$=(p-1)(p+3)^2+3(p+1)+2p^2-6(p+1)(p-1)-p(p+3)-p(p+3)$$
$$=p^2(p-1).$$

当 $p^2(p-1)\neq 0$, 即 $p\neq 0$ 且 $p\neq 1$ 时, 方程组有唯一解.
当 $p=0$ 时, 对增广矩阵作行初等变换:

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\3&0&3&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

此时方程组无解. 3.145

当 $p=1$ 时, 对增广矩阵作行初等变换:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-6 r_1]{r_2-4 r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

此时方程组无解.

因为

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} p & 1 & 2 \\ 2p & p-1 & 1 \\ 3 & p & p+3 \end{vmatrix} \\ &= p(p-1)(p+3)+3+4p^2-6(p-1)-p^2-2p(p+3) \\ &= p^3+3p^2-15p+9. \end{aligned}$$

3.146

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} p+3 & p & 2 \\ p & 2p & 1 \\ 3(p+1) & 3 & p+3 \end{vmatrix} \\ &= 2p(p+3)(p+3)+p(3p+3)+6p-4p(3p+3)-3(p+3)-p^2(p+3) \\ &= p^3+12p-9. \\ D_3 &= \begin{vmatrix} p+3 & 1 & p \\ p & p-1 & 2p \\ 3(p+1) & p & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(p+3)(p-1)+p^3+6p(p+1)-3p(p+1)(p-1)-2p^2(p+3)-3p \\ &= -4p^3+3p^2+12p-9. \end{aligned}$$

所以, 当 $p \neq 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{p^3+3p^2-15p+9}{p^2(p-1)};\ x_2=\frac{p^3+12p-9}{p^2(p-1)};\ x_3=\frac{-4p^3+3p^2+12p-9}{p^2(p-1)}.$$

当 $p=0$ 或 $p=1$ 时, 方程组无解. □ 3.147

**Exercise 80** (P.149 习题 30)**.** 讨论 $p, q$ 取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(2)\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 = 1, \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 = p, \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 = 3, \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 = q. \end{cases}$$

**解:** 对方程组的增广矩阵作行初等变换:

$$(\boldsymbol{A}, b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & q \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \end{array}\right),$$

3.148

可知当 $p \neq 0$ 或 $q \neq 2$ 时, 方程组无解; 当 $p = 0$ 且 $q = 2$ 时, 方程组有无穷多解, 此时对上述矩阵继续作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3, \end{cases}$ 得方程组的通解为: $\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 + 5c_3 - 2, \\ x_2 = -2c_1 - 2c_2 - 6c_3 + 3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$ 3.149

**Exercise 81** (P.149 习题 30)**.** 讨论 $p, q$ 取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(3)\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 = 1, \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 = 3, \\ & x_2 & +px_3 & +qx_4 = q-3, \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +(q-2)x_4 = q+3. \end{cases}$$

**解:** 对方程组的增广矩阵作行初等变换:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 1 & 1 & 2 & q-2 & q+3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & q-3 & q-2 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array}\right)$$

3.150

$$\xrightarrow{r_3 - r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array}\right).$$

(1) 当 $q-1=0$, 即 $q=1$ 时, 方程组无解.

(2) 当 $q \neq 1$ 且 $p \neq 2$ 时, 方程组有唯一解. 此时

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \div (q-1)]{r_3 \div (p-2)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{2-p} & \frac{4}{2-p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - \frac{2}{2-p} r_4]{\substack{r_1 + 4r_4 \\ r_2 - 3r_4}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6q+6}{q-1} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{4q+5}{1-q} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6q+6}{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{12q-4pq-5p-6}{(1-q)(2-p)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{array}\right),$$

3.151

得此时方程组的解为

$$x_1 = \frac{6q+6}{q-1}, \quad x_2 = \frac{12q-4pq-5p-6}{(1-q)(2-p)}, \quad x_3 = \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)}, \quad x_4 = \frac{q+2}{q-1}.$$

(3) 当 $p=2$ 且 $\frac{-2}{q-1} = \frac{-4}{q+2}$ 即 $q=4$ 时, 方程组有无穷多解, 此时

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 + 4r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3.152

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = -2x_3 - 7, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$ 得方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = -2c - 7, \\ x_3 = c, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

(4) 当 $p = 2$ 且 $\dfrac{-2}{q-1} \neq \dfrac{-4}{q+2}$ 即 $q \neq 4$ 时, 方程组无解. □ 3.153

**Exercise 82** (P.149 习题 31)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 若任一个 $n$ 维向量都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

证: 由题意可知方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 $n$, 故

$$n = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}),$$

得到

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 0.$$

故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $n$ 个线性无关的 $n$ 维列向量, 记矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$. 由题设可得

$$\boldsymbol{A\alpha}_i = \boldsymbol{0}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

于是

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}.$$

又因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}.$$

3.154

另证: 由题设, 基本单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是其解, 故

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \boldsymbol{0}.$$

即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. □ 3.155

**Exercise 83** (P.150 习题 34 (1))**.** 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n - 1. \end{cases}$$

证: (i) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ 时, 有 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(ii) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - 1$ 时, 有 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个非零元, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) \geqslant 1$.

又因为 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n$, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - (n-1) = 1.$$

综合可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(iii) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0, 于是 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$. □ 3.156

**Exercise 84** (P.150 习题 36)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵. 证明: 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

证: 充分性. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 对任意 $\boldsymbol{b}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

充分性得证.

必要性. 取 $n$ 个线性无关的 $n$ 维向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$, 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ 的解为 $\boldsymbol{x}_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$. 那么

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n).$$

两边取行列式并注意到 $|\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n|\neq 0$, 于是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. □ 3.157

**Exercise 85** (P.150 习题 38)**.** 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一般解是: 【 】

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$; (B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$; (D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;

解: $\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解; $\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 故排除 (A), (C).

选项 (D) 中, $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 是齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 但 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 不一定是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 故排除.

选项 (B) 正确. □ 3.158

**Exercise 86** (P.150 习题 39)**.** 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}$, 则 【 】

(A) $t=6$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=1$. (B) $t=6$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=2$.

(C) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=1$. (D) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=2$.

解: 由 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}$ 知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{P})+\mathrm{r}(\boldsymbol{Q})\leqslant 3.$$

- $t=6$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{Q})=1$, $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{P})\leqslant 2$;
- $t\neq 6$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{Q})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})\leqslant 1$. 又 $\boldsymbol{P}$ 为非零矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})>0$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=1$.

故选 (C). □

或者, $\boldsymbol{Q}$ 的各列是 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})\geqslant 1$. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $3-\mathrm{r}(\boldsymbol{P})$ 个解构成, 并且 $3-\mathrm{r}(\boldsymbol{P})\leqslant 2$.

$t\neq 6$ 时, $\boldsymbol{Q}$ 的第 1, 3 两列线性无关, 已经构成 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 从而 $3-\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=2$, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=1$. 3.159

**Exercise 87** (P.150 习题 40)**.** 设

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}},$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0,\\ l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\ l_3:\ a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}\qquad (a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3)$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

**证:** 三直线相交于一点的充分必要条件为: 方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}\qquad (a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3) \tag{20}$$

有惟一解. 3.160

记方程组 (20) 为

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}. \tag{21}$$

方程组 (21) 有惟一解的充要条件是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{c})=2. \tag{22}$$

注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{c})=\mathrm{r}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$, (因为 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{c})$ 与 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ 是列等价的.) 所以 (22) 即为

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=2.$$

即向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关. □ 3.161

**Exercise 88** (P.150 习题 41)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$ $(m<n)$, $\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶矩阵, 下列哪个成立?

(A) $\boldsymbol{A}$ 中任一 $m$ 阶子式 $\neq 0$;　(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意 $m$ 列线性无关;

(C) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq 0$;　(D) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$;

(E) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=m$.

**解:** (A) 错误. 应为: $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个 $m$ 阶子式 $\neq 0$.

(B) 错误. 应为: $\boldsymbol{A}$ 中存在某 $m$ 列线性无关.

(C) 错误. "$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $m<n$, 则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$". 见教材 P.129 例 2. 或见本文例题 37.

(D) 错误. 因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$, 故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 从而存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

(E) 正确. 见教材 P.128 性质 3. □ 3.162

*Example* 89. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m < n$, 则下述结论正确的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的任意 $m$ 个列向量必线性无关.

(B) $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的任意一个 $m$ 阶子式不等于零.

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

(D) $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 通过初等行变换必可以化为 $(\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{0})$ 的形式.

解: (D) 错. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

选 (C). 直观的解释是, $\boldsymbol{BA}$ 的行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的线性组合:

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{12}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{1m}\boldsymbol{a}_m \\ b_{21}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{2m}\boldsymbol{a}_m \\ \vdots \\ b_{t1}\boldsymbol{a}_1 + b_{t2}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{tm}\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}.$$

3.163

若 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$, 则

$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{12}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{1m}\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}, \\ b_{21}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{2m}\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ b_{t1}\boldsymbol{a}_1 + b_{t2}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{tm}\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m$, 知向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关, 则 $b_{ij} = 0$, 所以 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

或者: 由 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$. 下证方程组

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

只有零解.

因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 而且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = m$, 故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

另解: $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant m$. 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$, 故必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 0$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$. □ 3.164

**Definition 90.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,

- 若 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个列向量线性无关, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的;
- 若 $\boldsymbol{A}$ 的 $m$ 个行向量线性无关, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的.

由此总结一下矩阵乘法消去律成立的条件:

1. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l} = \boldsymbol{0}$, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ (即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.
2. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l} = \boldsymbol{0}$, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = n$ (即 $\boldsymbol{B}$ 是行满秩的), 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

3.165

*Example* 91. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times k$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $k \times m$ 矩阵, 试证:

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = k$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = k$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

**证:** (1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=k$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}_{k\times k}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可逆, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{QB}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{QB}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{QB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

(2) 同理. □

☞ 这里的 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为行满秩矩阵. 上述结论是矩阵秩的性质 3 的推广 (教材 P.128). 3.166

**Exercise 92** (P.151 习题 46)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵, 若存在正整数 $k$ ($k\geqslant 2$) 使得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 但 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $n$ 维非零列向量, 证明 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

**证:** 设

$$l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \tag{23}$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 得:

$$l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \tag{24}$$

因为 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 所以

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

代入 (24) 式得:

$$l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $l_1=0$. 3.167

将 $l_1=0$ 代入 (23) 式得:

$$l_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \tag{25}$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$ 得:

$$l_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_3\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{2k-3}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

注意到

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},$$

于是得到 $l_2=0$. 类似可得

$$l_3=l_4=\cdots=l_k=0.$$

因此结论成立. □ 3.168

*Example* 93 (P.151 习题 47). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $n<m$. $\boldsymbol{I}$ 是 $n$ 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$, 证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.

**证:** 因 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $n<m$, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,n\}=n.$$

又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n,$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$, 得证 $\boldsymbol{B}$ 的 $n$ 个列向量是线性无关的. □

**另解:** 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$, 则 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i$. 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0},$$

两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$, 得 $k_1\boldsymbol{A\beta}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{A\beta}_n=\mathbf{0}$, 即

$$k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0}.$$

只能有 $k_1=\cdots=k_n=0$, 故 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关. □ 3.169

**Exercise 94** (习题 48)**.** 已知 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 求 $a$, $b$ 的值.

**解:** 对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)$ 进行初等行变换:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\div 2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\1&0&3&\frac{1}{2}\\-3&1&-7&0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}0&3&6&b-\frac{1}{2}\\1&0&3&\frac{1}{2}\\0&1&2&\frac{3}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{ccc:c}0&0&0&b-5\\1&0&3&\frac{1}{2}\\0&1&2&\frac{3}{2}\end{array}\right),$$

故 $b=5$, $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=2$. 3.170

对 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 进行初等变换 (行变换、列变换均可):

$$\begin{pmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&a&5\\0&3&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-5r_2}\begin{pmatrix}0&a-15&0\\0&3&1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

因 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}=2$, 故 $a=15$. □ 3.171

**Exercise 95** (P.152 习题 50)**.** 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0, 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解.

**解:** 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$ 知, $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 且

$$\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

是方程组的一个解, 因此所求通解为

$$\boldsymbol{x} = c(1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

3.172

**Exercise 96** (P.152 习题 51)**.** 已知下列线性方程组 I, II 为同解线性方程组, 求参数 $m$, $n$, $t$ 之值.

$$\mathrm{I}: \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - \ \ x_4 = \ \ 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad\ = \ \ 3; \end{cases}$$

$$\mathrm{II}: \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - \ \ x_4 = -5, \\ \qquad\quad nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

3.173

解: 对方程组 I 的增广矩阵做初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3\times r_1]{r_3 - 4\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 4\times r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3]{r_i \times (-1)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

由此可以得到方程组 I 的一个特解:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = (-2, -4, -5, 0)^{\mathrm{T}}.$$

由于两方程组同解, 所以方程组 I 的解也是方程组 II 的解, 将 $\boldsymbol{\xi}_0$ 代入方程组 II 3.174
得:

$$\begin{cases} -2 - 4m + 5 = -5, \\ -4n + 5 = -11, \\ -5 = -t + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2, \\ n = 4, \\ t = 6. \end{cases}$$

3.175

**Exercise 97** (P.152 习题 52)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, \frac{1}{2}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 8)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = (1, \frac{1}{2}, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1, \frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{A}^2 &= (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = 2\boldsymbol{A}, \\
\boldsymbol{A}^4 &= 8\boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

于是方程组为: $16\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 8\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$, 即 $(8\boldsymbol{A} - 16\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}$. 对方程组的 3.176
增广矩阵作初等行变换:

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),
$$

故

$$
\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = 2x_3 + 1, \\ x_3 = x_3, \end{cases}
$$

于是方程组的通解为:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R}).
$$

3.177

**Exercise 98** (P.152 习题 53)**.** 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 列构成的 $n \times (n-1)$ 矩阵记为 $\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = n - 1, \qquad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n,
$$

得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 所以无解. □

另解: 由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性表示, 从而

$$
x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \boldsymbol{\alpha}_n
$$

无解, 即 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_n$ 无解. □ 3.178

**Exercise 99** (P.152 习题 56)**.** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 $n$ 阶矩阵, 证明:

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$; (2) $|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$;

(3) $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$ ($\lambda$ 为任意常数).

解: (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - \boldsymbol{A} \times r_1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}||\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|.$

(2) $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$ 3.179

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} = \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A});$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - \boldsymbol{B} \times r_2} \begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} = \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}),$$

所以 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$. □ 3.180

**更一般的结论（延伸话题，可以跳过）**

若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $m \times n$, $n \times m$ 矩阵, 则有下述结论成立:

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$

(2) $\lambda^n |\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \lambda^m |\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$

**证:** (1) 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

上两式两端取行列式, 即得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

3.181

(2) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \left|\lambda(\boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\right| = \lambda^m \left|\boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right|$$
$$= \lambda^m \left|\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right| = \lambda^{m-n} |\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

其中 $\left|\boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right| = \left|\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B})\right| = \left|\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right|$. 故

$$\lambda^n |\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \lambda^m |\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

另外, 易知有下列形式成立:

(1) $|\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$.

(2) $\lambda^n |\lambda\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \lambda^m |\lambda\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$. 3.182

使用上述结论可以降阶计算某些行列式. 例如, 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D_n = \left|\boldsymbol{I}_n + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}(y_1, \cdots, y_n)\right| = \left|\boldsymbol{I}_1 + (y_1, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right|$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

3.183

又如, 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: 这是第一章的经典例题. 使用 $|\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA}|$ 得到第 5 个解法.

$$\begin{aligned} D_n &= \left| (x-a)\boldsymbol{I}_n + \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix} \right| = \left| (x-a)\boldsymbol{I}_n + \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (1, \cdots, 1) \right| \\ &= (x-a)^n \left| \boldsymbol{I}_n + \frac{1}{x-a} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (1, \cdots, 1) \right| = (x-a)^n \left| \boldsymbol{I}_1 + \frac{1}{x-a} (1, \cdots, 1) \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \right| \\ &= (x-a)^n \left( 1 + \frac{na}{x-a} \right) = \big[ x + (n-1)a \big] (x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

3.184

**Exercise 100** (P.152 习题 57)**.** 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$, 则存在 $m \times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, $r \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{C}) = r$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$.

证: 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$, 所以存在 $m$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}_{r \times (n-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(m-r) \times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{U},$$

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^{-1}$. 将矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 分块为 $\boldsymbol{P}^{-1} = \big(\boldsymbol{B}_{m \times r}, \boldsymbol{M}_{m \times (m-r)}\big)$, $\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{r \times n} \\ \boldsymbol{N}_{(n-r) \times n} \end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{B}$ 中的 $r$ 列线性无关, $\boldsymbol{C}$ 中的 $r$ 行线性无关, 又 $r \leqslant m$, $r \leqslant n$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{C}) = r$, 且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \big(\boldsymbol{B}_{m \times r}, \boldsymbol{M}_{m \times (m-r)}\big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}_{r \times (n-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(m-r) \times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{r \times n} \\ \boldsymbol{N}_{(n-r) \times n} \end{pmatrix} \\ &= \big(\boldsymbol{B}_{m \times r}, \boldsymbol{0}_{m \times (n-r)}\big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{r \times n} \\ \boldsymbol{N}_{(n-r) \times n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{BC}. \end{aligned}$$

3.185

**Exercise 101** (P.153 习题 59)**.** 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leqslant r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然. 必要性. 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0},$$

$$
\begin{aligned}
k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2&=\mathbf{0},\\
k_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3&=\mathbf{0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
k_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{r2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r&=\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 所以存在一组不全为 0 的数使得某一个式子成立. 设 $k_{ii}$ 是所有系数中第一个不为 0 的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, 所以 $1<i\leqslant r$. 因为 $k_{ii}\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示. 又因为系数还满足满足 3.186

$$
k_{11}=k_{21}=k_{22}=\cdots=k_{i,i-1}=0
$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关, 所以表示法唯一. □ 3.187

**Exercise 102** (P.153 习题 60)**.** 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是

$$
\boldsymbol{\alpha}_i\neq\sum_{j=1}^{i-1}k_j\boldsymbol{\alpha}_j\qquad(i=2,3,\cdots,s).
$$

证: 必要性. 用反证法, 若存在某一个 $i_0$, 使得

$$
\boldsymbol{\alpha}_{i_0}=\sum_{j=1}^{i_0-1}k_j\boldsymbol{\alpha}_j,
$$

则一定有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 矛盾.

充分性. 用反证法, 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 由习题 59 可知存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ $(1<i_0\leqslant r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}$ 线性表示, 矛盾. □ 3.188

**Exercise 103** (P.153 习题 61)**.** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 如果在向量组的前面加入一个向量 $\boldsymbol{\beta}$, 证明: 在向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中至多有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ 可经其前面的 $i$ 个向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示. 并在 $\mathbb{R}^3$ 中做几何解释.

证: (1) 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 那么任何 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 都不能经其前面的 $i$ 个向量线性表示;

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 但 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 那么任何 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ 都不能经其前面的 $i$ 个向量线性表示;

(3) 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 从前往后考察, 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示. 下证至多有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 可由其前面的 $i$ 个向量线性表示. 3.189

用反证法. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j>i)$ 均可由前面的 $i$ 个与 $j$ 个向量线性表示, 即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_i&=k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\\
\boldsymbol{\alpha}_j&=l_0\boldsymbol{\beta}+l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+l_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+l_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1},
\end{aligned}
$$

其中 $k_0\neq 0$, 否则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由前 $i-1$ 个向量线性表示，与其线性无关矛盾. 同理 $l_0\neq 0$. 由上面的两个式子得到:

$$
\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k_0}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_0}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\frac{1}{k_0}\boldsymbol{\alpha}_i+0\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_j,
$$

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{l_1}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{l_{i-1}}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{l_i}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_i-\cdots-\frac{l_{j-1}}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_{j-1}+\frac{1}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_j.$$

比较两式，说明 $\boldsymbol{\beta}$ 可以用两组不同的系数被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j$ 线性表示. 矛盾. 即至多只有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其前面的 $i$ 个向量线性表示. 3.190

几何解释: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0), \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0), \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$,

当 $\boldsymbol{\beta}=(a,b,0)$ 时, $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示: $\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{b}\boldsymbol{\beta}-\frac{a}{b}\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示.

当 $\boldsymbol{\beta}=(0,b,c)$ 时, $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示:$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{b}{c}\boldsymbol{\alpha}_2$.

当 $\boldsymbol{\beta}=(a,0,c)$ 时, $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示:$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}-\frac{a}{c}\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2$.

当 $\boldsymbol{\beta}=(a,b,c)$ 时, $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 任意三个不共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示:$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}-\frac{a}{c}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{b}{c}\boldsymbol{\alpha}_2$. 3.191

**Exercise 104** (P.153 习题 62)**.** 证明: 在 $n$ 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性. 由教材 116 页定理 3.3, 知表示法唯一.

必要性. 用反证法: 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

由条件又设

$$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

于是得到

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+\lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s.$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的方法有两种, 矛盾. □ 3.192

**Exercise 105** (P.153 习题 63)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$;　　(2) $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$.

证: 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 中任意两个列向量线性相关, 即任意两列成比例. 故可设

$$\boldsymbol{A}=\left(b_1\boldsymbol{\alpha},b_2\boldsymbol{\alpha},\cdots,b_n\boldsymbol{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

由 (1) 可知: 3.193

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \left[ (b_1, b_2, \cdots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right] (b_1, b_2, \cdots, b_n) \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

其中 $k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. □ 3.194

**Exercise 106** (P.154 习题 66)**.** 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $m$ 个行向量是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 又 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $m$ 阶可逆矩阵. 证明: $\boldsymbol{BA}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得:

$$
\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0},
$$

即 $(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$ 的 $m$ 个列向量都是 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的解, 亦即 $\boldsymbol{BA}$ 的 $m$ 个行向量都是 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的解. 又因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{BA}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m = \boldsymbol{BA} \text{ 的行数} = \text{基础解系中解向量的个数}.
$$

故结论成立. □ 3.195

**Exercise 107** (P.154 习题 67)**.** 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵 $(n > 1)$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}|$ 中任意两行 (列) 对应元素的代数余子式成比例.

证: 即要证伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中任意两行 (列) 成比例.

由 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$, 得

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 0 \text{ 或 } 1.
$$

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 0$, 则 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{0}$, 结论成立.

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 1$, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 中任意两行 (列) 线性相关, 即成比例. 结论成立. □ 3.196

**Exercise 108** (P.154 习题 69)**.** 若 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $n$ 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 证明

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = n.
$$

证: 一方面

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n,
$$

另一方面, 由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$, 故

$$
\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \leqslant n.
$$

综合可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = n$. □ 3.197

**Exercise 109** (P.154 习题 70)**.** 若 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $n$ 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 证明

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.$$

证: 一方面,

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})&=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{I})=n,\end{aligned}$$

另一方面, 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n.$$

综合可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$. □ 3.198

**Exercise 110** (P.154 习题 71)**.** 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 皆为 $n$ 阶方阵, 证明

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n.$$

证: 由习题 15 的结论可知:

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})&=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\\&=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\&=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(-\boldsymbol{AB})=n+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}),\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n$. □ 3.199

**Exercise 111** (2014 考研试题 11 分)**.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: (I) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$. 3.200

(II) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 施以初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 \text{ 的通解为 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\boldsymbol{\alpha},\ k_1 \text{ 为任意常数;}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2 \text{ 的通解为 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\boldsymbol{\alpha},\ k_2 \text{ 为任意常数;}$$ 3.201

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_3 \text{ 的通解为 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\boldsymbol{\alpha},\ k_3 \text{ 为任意常数.}$$

于是所求矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\boldsymbol{\alpha}, k_1\boldsymbol{\alpha}, k_3\boldsymbol{\alpha}),$$

$k_1$, $k_2$, $k_3$ 为任意常数. 3.202

*Example* 112. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

**解:** 记该方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 方程组有 4 个未知量,

$$n - r = 4 - 3 = 1,$$

故其对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个向量.

由 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解, 知 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3$ 为对应的齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解, $(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3)$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. 又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础 3.203

解系含有一个向量, 所以可以取

$$(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 基础解系. 故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为:

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\qquad(c\in\mathbb{R}).$$

3.204

*Example* 113. 设有向量组 $A:\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, 及向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix}$, 问 $\alpha,\beta$ 为何值时

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 $A$ 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式惟一;

(3) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解: (此题其实是重要题型“带参量的线性方程组”的另一种出现方式.)

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}$, 即

$$\begin{cases}\alpha x_1-2x_2-\ \ x_3=\ \ 1,\\ 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=\ \ \beta,\\ 10x_1+5x_2+4x_3=-1.\end{cases}\tag{26}$$

3.205

往下讨论方程组 (26) 的解即可. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\alpha&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}\overset{c_1-2c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\alpha+4&-2&-1\\0&1&1\\0&5&4\end{vmatrix}=-(\alpha+4),$$

所以, 当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 即 $\alpha\neq-4$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式惟一.

当 $\alpha=-4$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-4&-2&-1&1\\2&1&1&\beta\\10&5&4&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_2]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}0&0&1&1+2\beta\\2&1&1&\beta\\0&0&-1&-1-5\beta\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&\beta\\0&0&1&1+2\beta\\0&0&-1&-1-5\beta\end{array}\right)\xrightarrow{(r_3+r_2)\div(-3)}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&\beta\\0&0&1&1+2\beta\\0&0&0&\beta\end{array}\right),$$

所以, 当 $\alpha=-4$ 且 $\beta\neq 0$ 时, 方程组 (26) 无解, 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 $A$ 线性表示. 3.206

当 $\alpha=-4$ 且 $\beta=0$ 时, 方程组 (26) 有解. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&\beta\\0&0&1&1+2\beta\\0&0&0&\beta\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得方程组 (26) 的同解方程组及通解为

$$\begin{cases}x_1=x_1,\\x_2=-2x_1-1,\\x_3=1.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=c,\\x_2=-2c-1,\\x_3=1.\end{cases}$$

即, 当 $\alpha=-4$ 且 $\beta=0$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式不惟一, 其一般表示式为

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(2c+1)\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\quad(c\in\mathbb{R}).$$

3.207

*Example* 114. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$, 其中 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: **方法一**. 记方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3+x_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}.$$

代入 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$, 整理得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{a}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{a}_3+(x_4-1)\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 故只能有

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0,\\-x_1+x_3=0,\\x_4-1=0.\end{cases}\tag{27}$$

3.208

方程组 (27) 等价于

$$\begin{cases}x_2=-2x_1+3,\\x_3=x_1,\\x_4=1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_1,\\x_2=-2x_1+3,\\x_3=x_1,\\x_4=1.\end{cases}$$

得方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix},\quad(c\in\mathbb{R}).$$

**方法二**. 由题设知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, $n-r=4-3=1$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只包含一个向量. 由 $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$, 即

$$1\boldsymbol{a}_1+(-2)\boldsymbol{a}_2+1\boldsymbol{a}_3+0\boldsymbol{a}_4=\mathbf{0},$$

故可取 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$. 3.209

再由

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

知 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解. 所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 $k$ 为任意常数. 3.210

**方法三**. 记矩阵 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\right)$. 则

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\right)=\left(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\right)\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{PB},$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4=\left(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\right)\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{P\beta}.$$

则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为

$$\boldsymbol{PBx}=\boldsymbol{P\beta},\quad 即\quad \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Bx}-\boldsymbol{\beta}\right)=\mathbf{0}.$$

注意 $\boldsymbol{P}$ 是 $4\times3$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P})=3$, 则方程组 $\boldsymbol{Py}=\mathbf{0}$ 只有零解, 所以

$$\boldsymbol{Bx}-\boldsymbol{\beta}\equiv\mathbf{0}.$$

3.211

解方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

得通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $k$ 为任意常数. 3.212

*Example* 115. 设向量组

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求 $a$, $b$.

**解:** 依次记这 4 个向量为 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, 并记此向量组为 $A$. 易见 $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性无关 (因这两个向量对应坐标不成比例), 而已知向量组 $A$ 的秩为 2, 所以 $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 是向量组 $A$ 的一个极大无关组. 则 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 可以由向量组 $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性表示.

设

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $x = 0$, $y = 1$, 从而 $a = 2$.

用同样的方法可以计算得 $b = 5$. □ 3.213

*Example* 116. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 $n$ 维向量, 已知 $n$ 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

**证:** 向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = n, \text{ 且 } \mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \leqslant n,$$

所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = n.$$

得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

**另证**. 注意 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 当然是可以由单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示的, 再加上已知条件, 知两向量组等价. 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = n,$$

得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关. □ 3.214

*Example* 117. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 $n$ 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 $n$ 维向量都可由它们线性表示.

证: (充分性) 任一 $n$ 维向量都可由 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 则 $n$ 维单位向量组 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 线性表示. 由上一题得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

(必要性) 设 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 线性无关. 任给 $n$ 维向量 $\boldsymbol{b}$, 则向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}$ 线性相关 ($n+1$ 个 $n$ 维向量必线性相关). 则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 线性表示 (且表示式是惟一的).

**必要性的另一个说法**: 若 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 线性无关, 注意到这是一组 $n$ 维向量, 则它们是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以任一 $n$ 维向量都可由它们线性表示. □ 3.215

*Example* 118. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 证明存在某个向量 $\boldsymbol{a}_k$ $(2 \leqslant k \leqslant m)$, 使 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

证: 假设不存在这样的 $\boldsymbol{a}_k$. 则 $\boldsymbol{a}_2$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1$ 线性表示, 从而向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关.

$\boldsymbol{a}_3$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示, 又向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性无关.

依次类推, 可以得到向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_m$ 线性无关. 这与题设矛盾. 假设不成立. 得证. □ 3.216

*Example* 119. 已知向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1$, 试证向量组 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

证: **方法一**. 由已知得

$$\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\big) = \big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\big) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

记作 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AK}$. 设

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{28}$$

即 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$. 代入 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AK}$, 得

$$\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{Kx}\big) = \boldsymbol{0}. \tag{29}$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性无关, 故要使 (29) 式成立, 只能有

$$\boldsymbol{Kx} = \boldsymbol{0}. \tag{30}$$

又 3.217

$$|\boldsymbol{K}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

故方程组 $\boldsymbol{Kx} = \boldsymbol{0}$ 只有零解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

**方法二**. 由已知得

$$\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\big) = \big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\big) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$. 因 $|\boldsymbol{K}|=2\neq 0$, 知 $\boldsymbol{K}$ 可逆, 由矩阵秩的性质 3 (教材 P.128) 知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关, 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$, 得证矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 线性无关. □ 3.218

*Example* 120. 设向量组 $B$: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 能由向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K},$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $s\times r$ 矩阵, 且 $A$ 组线性无关. 证明 $B$ 组线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{K})=r$.

**证:** (必要性) 设 $B$ 组线性无关.

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$, 则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}. \tag{31}$$

由秩的性质知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{K})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{K}). \tag{32}$$

而由 $B$ 组线性无关知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{K})\geqslant r$.

又 $\boldsymbol{K}$ 为 $r\times s$ 阶矩阵, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{K})\leqslant r$.

综上知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{K})=r$. 3.219

(充分性) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{K})=r$. 令

$$x_1\boldsymbol{b}_1+x_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{0}. \tag{33}$$

下证方程 (33) 只有零解. 为方便记方程 (33) 为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{34}$$

代入 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$ 则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}. \tag{35}$$

由向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关, 所以方程 (35) 只有零解:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{36}$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{K})=r=$ 未知量个数, 所以方程 (36) 只有零解:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关. □ 3.220

*Example* 121. 设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1= \quad\;\; \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1 \quad\;\; +\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \qquad\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}.\end{cases}$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

**证:** 由题设知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 下面只需证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

由题设得

$$\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n = (n-1)(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n),$$

所以

$$(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n.$$

3.221

得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_1, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_n. \end{cases}$$

得证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

综上, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

**另一个思路:** 先说明系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

再得两向量组等价. □ 3.222

*Example* 122. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,

(1) 记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$; (2) 求 $|\boldsymbol{A}|$.

**解:** (1) 由 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\text{由 } \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是 3 阶方阵, 又向量组 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关, 所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$, 得 3.223

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PBP}^{-1}$, 两边取行列式得,

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = 0.$$

3.224

*Example* 123. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{b}_1 + k_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}, \tag{37}$$

即

$$(k_1+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(k_i+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_i+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}. \tag{38}$$

因向量组 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 故只能有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0, \\ \qquad k_2 + \cdots + k_r = 0, \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad k_r = 0. \end{cases} \tag{39}$$

通过回代可直接解得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$. 所以 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性无关. 3.225

**证二**. 因为

$$(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

而矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r) = \mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r) = r.$$

得证 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性无关. 3.226

**证三**. 由题设知向量组 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r$ 线性表示;

又 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b}_r - \boldsymbol{b}_{r-1}$, 知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性表示.

故向量组 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 等价. 又 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r) = \mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r) = r.$$

得证 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性无关. 3.227

**证四**. 记矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r)$, 则

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r)$$

$$\xrightarrow[j=r,\cdots,2,1]{c_j-c_{j-1}}(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_r),$$

从而,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{b}_r)=\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_r)=r,$$

知 $\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关. □ 3.228

# 7 总结与复习

## 7.1 本章要点

### (一) 向量的线性表示.

有关向量的线性表示, 下面的说法是等价的:

向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

$\iff$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$ 有解.

$\iff$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$.

☞ 上述结论的朴素理解: $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$, 意味着往向量组 $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 中添加向量 $\boldsymbol{b}$, 并没有使得向量组的秩增加, 其根本原因在于向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

其**几何本质**是: 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 的秩为 $r$, 则它们构成 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $r$ 维子空间. 向量 $\boldsymbol{b}$ 属于这个 $r$ 维子空间, 等价于 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,$
$\boldsymbol{a}_m$ 线性表示. 3.229

进而, $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$, 也可理解为往向量组 $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 中添加向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$, 并没有使得向量组的秩增加. 所以, 向量组 $B$: $\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{b}_s$ 能由向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是

$$\mathrm{r}\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s).$$

当然, 其**几何本质**仍然是: 向量组 $B$ 处在向量组 $A$ 所张成的 $r$ 维子空间内,
这里 $r=\mathrm{r}\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$. 3.230

### (二) 线性相关与线性无关.

对于**线性相关**, 下面的说法是等价的:

向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ $(m\geqslant 2)$ 线性相关.

$\iff$ 向量组 $A$ 中至少存在一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

$\iff$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

$\iff$ $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ 的秩小于向量的个数 $m$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)<m$.

对于**线性无关**, 下面的说法是等价的:

向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ $(m\geqslant 2)$ 线性无关.

$\iff$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

$\iff$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=m$. 3.231

☞ 从上述说法要得到的理解是:

(1) 注意向量组、方程组、矩阵问题的相互转换;

(2) 得到一个朴素的认识: $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m) < m$ 的根本原因在于, 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中有多余的向量, 或说存在某向量可以被其他的向量线性表示, 当然整个向量组是线性相关的.

(3) 其**几何本质**是: 向量组线性相关, 说明其中至少有一个向量, 处在余下向量所张成的子空间内. 3.232

## (三) 矩阵的秩

**矩阵的秩, 是其行向量 (或者列向量) 所张成的子空间的维数.**

1. 初等变换不改变矩阵的秩. 或者用下面的两种方式表述:
   (i) 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. (但 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 不能得 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, 除非两者是同型矩阵.)
   (ii) 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{PAQ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.
2. 矩阵和、差、积的秩.
   (i) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.
   (ii) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$. 其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵. 3.233

## (四) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的判别

这里 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 即未知量的个数是 $n$, 方程的个数是 $m$. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情形只有 3 种: 无解, 有唯一解, 有无穷多解. 即

$$\begin{cases}\text{无解}\\ \text{有解}\begin{cases}\text{有唯一解;}\\ \text{无穷多解.}\end{cases}\end{cases}$$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 是否成立, 是判断有解、无解的依据; $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 是否成立, 是判断有唯一解、有无穷多解的依据. 即

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\begin{cases}\text{无解}\Longleftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\\ \text{有解}\Longleftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\begin{cases}\text{有唯一解}\Longleftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n;\\ \text{无穷多解}\Longleftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n.\end{cases}\end{cases}$$

3.234

### a. 用高斯消元法解释

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. 注意到 $\boldsymbol{B}$ 比 $\boldsymbol{A}$ 只多 1 列, 故要么 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$, 要么 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$, 则说明高斯消元法完成后, $\boldsymbol{B}$ 的非零行比 $\boldsymbol{A}$ 的非零行多 1 行, 多出来的那一行是矛盾方程 $0=1$, 导致方程组无解.

$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$ 时, 说明高斯消元法最后余下的方程的个数少于未知量的个数 $n$, 故有自由未知量出现, 则方程组有无穷多解, 并且自由未知量的个数为 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 故 3.235

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + 1$, 则说明出现了矛盾方程, 导致方程组无解.
(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 则没有矛盾方程, 方程组有解.

(i) 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$ 时, 说明出现了自由未知量, 导致方程组有无穷多解;

(ii) 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ 时, 则没有出现自由未知量, 所以方程组有唯一解.

☞ 是否出现**矛盾方程**是方程组有解与否的关键; 是否出现**自由未知量**又是区分有无穷多解和有唯一解的关键. 3.236

### b. 从向量的角度去解释

记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解
$\Longleftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$.
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

3.237

### c. 从几何的角度去解释

记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解
$\Longleftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 属于向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 所张成的子空间.
$\Longleftrightarrow$ 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 所张成的子空间, 与向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ 所张成的子空间, 是同一个子空间.
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

3.238

## (五) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 解的判别

这里 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 即未知量的个数是 $n$, 方程的个数是 $m$.

齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是天然有解的, 它至少有一个解: 零解. 所以对齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 我们关心的不在于它有没有解, 而在于它是否有非零解.

下面的结论要非常的清楚:

$n$ 元齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$.
$n$ 元齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$.

**齐次方程解的几何看法**

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 知向量 $\boldsymbol{x}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量都是垂直的; 注意到解集构成一个 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 维子空间 $\boldsymbol{V}_0$, 而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量构成一个 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 维子空间 $\boldsymbol{V}$, 故这两个空间是相互垂直的. 几何上看, 求解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 就是要寻找与 $\boldsymbol{V}$ 垂直的那个空间 $\boldsymbol{V}_0$.

3.239

(六) “$n-r$” 的含义.

定理 3.14 是说: 对 $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

$r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯型矩阵中非零行的行数, 是**非自由未知量**的个数. (非自由未知量一般取自非零行的第一个非零元所对应的未知量, 一个非零行只能确定一个非自由未知量.)

$n$ 是未知量的总数, 所以 $n-r$ 是**自由未知量**的个数. 有多少个自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量. 3.240

(七) 研究极大无关组的意义.

极大无关组和原向量组是等价的, 是原向量组的简约, 更是原向量组的 “全权代表”.

极大无关组从理论上弄清了: 用消元法解线性方程组时, 为什么最后剩余的方程数量是稳定的. 事实上那些剩下的方程就是原方程组的 “极大无关组”, 和原方程组是等价的, 是同解的.

线性相关、线性表示的概念也可以解释用消元法解线性方程组的相关问题: 方程组是 “线性相关” 的, 说明有多余的方程; 能被其他的方程 “线性表示” 的方程就是多余的. (“多余” 是相对的, 方程的去、留不是绝对的, 因极大无关组一般不唯一.)

极大无关组也使线性方程组在解的表示上, 得到了简洁、完备的表达.

从几何本质上看, 极大无关组还充当了坐标系的功能. **极大无关组所包含向量的个数 = 原向量组所张成子空间的维数**. 3.241

(八) 矩阵等价与向量组等价的区别与联系.

设有两个 $n$ 维向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$, 和 $B$: $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\right)$, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\right)$. 则

(1) 向量组等价, 可得矩阵等价; (注意这里所设的两向量组中向量的个数相同, 否则两矩阵的列数不同, 会导致矩阵不是同型矩阵, 就不能得到矩阵等价.)

(2) 矩阵等价, 不能得到向量组等价. 3.242

例如, 设 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$, 知 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 但向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 不是等价的.

☞ 两向量组等价的充要条件是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

而不是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是由向量组 $A$ 和 $B$ 所构成的矩阵. 3.243

### (九) 新添矩阵可逆的等价说法

$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 新添下列等价说法:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$. (不可逆矩阵又称为降秩矩阵.)

(2) $\boldsymbol{A}$ 的标准形是 $\boldsymbol{I}$; 或 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{I}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 可以表达为若干个初等矩阵的乘积.

(4) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(5) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

注意, 第一章的克拉默法则只告诉了我们矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分条件. 3.244

### (十) 要避免的错误

求矩阵秩时, 行变换和列变换可以随意进行, 行变、列变、两者交叉进行, 都可以 (*因为“初等变换不改变矩阵的秩”*).

而解方程和求逆矩阵时只能进行一种变换:

(1) 对增广矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 进行初等变换求解方程时, 只有行变换, 不能有列变换; (*因该过程本质上是消元法, 当然只能方程与方程之间进行运算, 在对应的增广矩阵中就体现为初等行变换.*)

(2) 用矩阵初等变换 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) \cong (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1})$ 求逆矩阵时, 只有行变换, 不能有列变换. 其他的情形类似. 3.245

## 7.2 题型举例

### 7.2.1 向量组的线性相关性

*Example* 124. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是 【　】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关.

**解:** 选 (C).

“向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是向量组中至少存在一个向量能由其余 $s-1$ 个向量线性表示”, 这句话的等价叙述是, “向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是向量组中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示”.

(B) 只能说明向量两两线性无关, 得不到整个向量组线性无关. (A), (B), (D) 都只是必要条件. □ 3.246

*Example* 125. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 $n$ 维列向量, 下列结论正确的是 【　】

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$.

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

**解:** 选 (B). □ 3.247

*Example* 126 (1994 数一). 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 则向量组【　】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

**解:** (A) 错: $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

(B) 错: $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

(D) 错: $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

选 (C): 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

且右侧矩阵可逆. □ 3.248

*Example* 127 (1994 数四). 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩【　】

(A) 必有一个等于零.　　(B) 都小于 $n$.

(C) 一个小于 $n$, 一个等于 $n$.　　(D) 都等于 $n$.

**解:** 因 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 1$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant 1$. 故 (A) 错.

若其中一个秩为 $n$, 即该矩阵可逆, 则另一个矩阵只能是零矩阵. 这与 "$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵" 矛盾. 故 (C), (D) 错.

由题设知方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$. 同理, 由 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解, 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<n$. 选 (B).

**另解:** 由教材 P.137 例 3: 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\mathbf{0}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 1$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant 1$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 都小于 $n$. □ 3.249

*Example* 128. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有【　】

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

**解:** 存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$, 说明方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$$

有非零解, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

另一方面, $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 又 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$, 即方程组

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

有非零解. 从而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量线性相关, 即 $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关. 故选 (A). 3.250

方法二. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数 (也是 $\boldsymbol{B}$ 的行数) 为 $n$. 因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 1$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant 1$. 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n-1,\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n-1,$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 行秩不足 $n$, $\boldsymbol{B}$ 列秩不足 $n$. 故选 (A).

直观的理解是, 注意到矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的线性组合, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的线性组合, 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关. 3.251

方法三. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 则在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中至少存在一个非零的列向量 $(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{mi})^{\mathrm{T}}$ 使得

$$b_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{mi}\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. 类似可判断 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关. □ 3.252

*Example* 129 (2002 数三). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 【 】

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解. (B) 当 $n>m$ 时必有非零解.

(C) 当 $n<m$ 时仅有零解. (D) 当 $n<m$ 时必有非零解.

**解:** 注意到 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times m$ 矩阵, 即 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 是 $m$ 元方程组. 当 $n<m$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 所以

$$\mathrm{r}\,(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\leqslant n<m,$$

系数矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩小于未知量的个数, 导致方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 选 (D). □

☞ 见教材 P.148 习题 17. 3.253

*Example* 130 (2000 数一, P.378 题 8). 设 $n$ 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m<n)$ 线性无关, 则 $n$ 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件为 【 】

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

**解:** 选 (D). 已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$, 则

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关,

$\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{B})=m$,

$\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ (注意到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵). □ 3.254

☞ 强调: $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 但反之不一定成立, 除非 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵. 因为不同型的矩阵也可能秩相等, 但不同型的矩阵是不可能等价的. (比

较教材 P.148 题 24: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.)

要特别注意选项 (C) 是错误的.

反例: 设 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, 而 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. 这里 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 但是得不到 "向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 等价".

注意向量组等价与矩阵等价的差别: 矩阵等价不能推出它们的行向量组 (或列向量组) 是等价的. 3.255

*Example* 131 (P.377 题 6). 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$.

(1) 问 $p$ 为何值时, 该向量组线性无关? 此时用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$.

(2) $p$ 为何值时, 该向量组线性相关? 此时求它的秩和一个极大线性无关组. 3.256

**解:** 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\substack{r_4+2r_2\\ r_2\times(-1)}]{(r_3+3r_2)/(-7)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&p-9&p-2&-8\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{(r_2-r_3)/2\\ r_4-(p-9)r_3}]{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-2&1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{array}\right)\tag{40}$$

(1) 当 $p\neq 2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 且 3.257

$$(40)\xrightarrow{r_4\div(p-2)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{1-p}{p-2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&\frac{3p-4}{p-2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{1-p}{p-2}\end{array}\right).$$

得
$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

(2) 当 $p=2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

其一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 或者为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. □

☞ 当 $p=2$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_2$. 3.258

注意, 这个题目其实是重要题型 "带参量的线性方程组" 的另一个提法: 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha},$$

相当于讨论下面方程组的解:

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=4, \\ x_1-3x_2+2x_3-6x_4=1, \\ x_1+5x_2-x_3+10+x_4=6, \\ 3x_1+x_2+(p+2)x_3+px_4=10. \end{cases}$$

3.259

*Example* 132. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

**证:** 方法一. 令

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\mathbf{0}. \tag{41}$$

即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}. \tag{42}$$

在 (42) 式两边左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$, $i=1,2,\cdots,t$, 得

$$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 所以只能是

$$k_0+k_1+\cdots+k_t=0, \tag{43}$$

代入 (42) 式, 得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 为基础解系, 是线性无关的, 所以只能 3.260

$$k_1=k_2=\cdots=k_t=0,$$

代入 (43) 式, 得 $k_0=0$. 即要使 (41) 式成立只能是

$$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_t=0,$$

得证向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关. 3.261

方法二. 由题设可知 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

事实上, 假若 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性相关, 而已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, 这与题设矛盾. 又

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \boldsymbol{B}\boldsymbol{K},$$

而 $\boldsymbol{K}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关. 3.262

方法三. 先说明 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关 (如前述). 又

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t) \xrightarrow[j=2,\cdots,t+1]{c_j-c_1} (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t),$$

所以

$$\mathrm{r}\big(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t\big) = \mathrm{r}\big(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\big) = t+1,$$

得证 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关. □ 3.263

### 7.2.2 线性方程组的解

*Example* 133. 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a =$________.

**解:** 方程组无解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 由

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(a-2)r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{array}\right),$$

若 $a=-1$, 则 3.264

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cong \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right),$$

此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 方程组无解. 故答案为: $a=-1$.

而 $a=3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$, 方程组有无穷多解. □ 3.265

*Example* 134. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解. 试求方程组的全部解.

**解:** 将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 带入方程组, 得 $\lambda = \mu$. 即方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\lambda)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

3.266

记方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换, 有

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3-r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1\div 2]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0\end{array}\right). \tag{44}$$

(I) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,

$$\boldsymbol{B}\cong\left(\begin{array}{cccc:c}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right), \tag{45}$$

此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2<n=4$, 方程组有无穷多解. 得同解方程组为 3.267

$$\begin{cases}x_1= x_3-\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2},\\ x_2=-3x_3-x_4+1,\\ x_3= x_3,\\ x_4= x_4,\end{cases}$$

故其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

其中 $k_1$, $k_2$ 为任意常数. 3.268

(II) 当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时,

$$(44)\xrightarrow{r_3\div(\lambda-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right),$$

此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3<n=4$, 方程组有无穷多解. 得同解方程组及其通解为

$$\begin{cases}x_1= 2x_3-1,\\ x_2= -x_3,\\ x_3= x_3,\\ x_4=-2x_3+1.\end{cases}\implies\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

其中 $k$ 为任意常数. □ 3.269

*Example* 135. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则 $t=$________.

解: 即言线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}\begin{vmatrix}1&0&-2\\4&t+3&3\\3&0&1\end{vmatrix}=7(t+3),$$

故 $t=-3$. □ 3.270

*Example* 136. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是 【 】

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

解: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则下列基本结论要非常清楚:

- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解 $\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$.
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$.
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$.
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解 $\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$.

选项 (A) 错, 除非系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. (B) 错, 因不能判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解. 正确答案是 (D). □ 3.271

*Example* 137. 设 $n$ 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中方程个数为 $m$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 则 【 】

(A) 当 $r=m$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解.

(B) 当 $r=n$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(C) 当 $n=m$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(D) 当 $r<n$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

解: 注意到方程个数为 $m$, 即 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 行数为 $m$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant m$.

当 $r=m$ 时, 由 $m=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant m$, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=m$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解. 故选 (A).

(B) 错误: $r=n$ 不能得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 即不能判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解.

(C) 错误: 只是说了 $\boldsymbol{A}$ 为方阵而已.

(D) 错误: 不能判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解. □ 3.272

*Example* 138. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$, 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解, 则对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 【 】

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

**解:** 已知 $\boldsymbol{A}^* \neq \mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个代数余子式不等于零, 则 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant n-1$.

又 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的互不相等的解, 即言 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解不唯一, 所以 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩的, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-1$.

综上得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1$, 则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系仅含一个非零解向量, 故选 (B). □ 3.273

*Example* 139 (P.381 题 35(2002 数四)). 已知 4 元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

又已知另一个 4 元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, a+2, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 4, a+8)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 当 $a$ 为何值时, 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

**解:** (1) 方程组 (I) 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (5, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (-3, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解, 将 (II) 的通解 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入 (I) 中, 得 3.274

$$\begin{cases} (a+1)\, k_1 = 0, \\ (a+1)\, k_1 - (a+1)\, k_2 = 0. \end{cases}$$

当 $a \neq -1$ 时, $k_1 = k_2 = 0$, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 则 (I) 和 (II) 无非零公共解;

当 $a = -1$ 时, $k_1$, $k_2$ 任意, 此时 (I) 和 (II) 有非零公共解, 且全部非零公共解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$k_1$, $k_2$ 为不全为零的任意实数. □ 3.275

*Example* 140 (2005 数四). 已知齐次线性方程组

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases} \quad \text{和 (II)} \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)\, x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 $a$, $b$, $c$ 的值.

**解:** 记两方程组的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

因 $\boldsymbol{A}$ 的前两行不成比例, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$, 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant 2$, 由 (I) 和 (II) 同解, 得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 2.$$

所以 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a$$

得 $a=2$. 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换, 有 3.276

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_1-r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 (I) 的一个基础解系: $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 代入 (II), 有

$$\begin{cases} -1-b+c=0, \\ -2-b^2+c+1=0, \end{cases}$$

得 $b=1$, $c=2$, 或 $b=0$, $c=1$.

当 $b=0$, $c=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$, 从而 (I) 和 (II) 不可能同解. 故 $b=0$, $c=1$ 应舍去.

综上, 当 $a=2$, $b=1$, $c=2$ 时, (I) 和 (II) 同解. □

☞ 注意 "同解" 和 "有公共解" 的差异. 若线性方程组同解, 则两者的系数矩阵的秩是相等的. 3.277

*Example* 141 (2003). 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

② 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

③ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

④ 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.

以上命题正确的是 【 】

(A) ①②. (B) ①③. (C) ②④. (D) ③④.

**解:** 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则可以认为前者的基础解系是后者基础解系的一部分, 从而 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 所以 ① 正确.

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 则两者的基础解系相同, 所以 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 知 ③ 正确. (这可以作为一个小的结论.)

故选 (B).

② 和 ④ 犯的是一样的错误. 因为, 由系数矩阵秩的关系, 不能得到方程组解之间的关系. □ 3.278

*Example* 142 (2001 数三). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n$ 维列向量, 若 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 则线性方程组 【 】

(A) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多个解.

(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解.

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

**解:** 已知 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n$, 所以 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}<n+1$, 得 $n+1$ 元齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 选 (D).

另外，由 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \geqslant \mathrm{r}\,(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，可得 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，只能说明方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ 有解，不能断定解是否唯一，选项 (A), (B) 都是不恰当的. □ 3.279

*Example* 143 (2005 数一). 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $(a,b,c)$，$a$，$b$，$c$ 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ ($k$ 为常数)，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$，求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

**解:** $a$, $b$, $c$ 不全为零，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant 1$. 又 $1 \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant 3 - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，所以 $1 \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$. 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 1$，$k = 9$，这时 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，于是通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ ($k_1$ 是任意实数).

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 1$ 或 2.

(i) $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 2$，则 $k \neq 9$，这时 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，于是通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$，$k_2$ 是任意实数. (ii) $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 1$，则 3.280
$k = 9$，这时 $\boldsymbol{B}$ 的列向量不能构成方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 由 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$，得 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$，不妨设 $a \neq 0$，得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，于是通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$，$k_2$ 是任意实数. □ 3.281

### 7.2.3 矩阵的秩

*Example* 144. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有 【 】

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$. (B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

**解:** 由关系式

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & \text{当 } \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 1$，得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$，则 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 3.282

计算得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2,$$

所以 $a = b$ 或 $a + 2b = 0$.

而 $a=b$ 时, 有 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$, 不合题意, 所以要求 $a \neq b$. 选 (C). □ 3.283

*Example* 145. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵, 试证: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) \geqslant n$.

**证:** 注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(-\boldsymbol{A})$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) &= \mathrm{r}(-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) \\ &\geqslant \mathrm{r}\big((-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\big) \\ &= \mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n. \end{aligned}$$

□ 3.284

*Example* 146. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $4\times 3$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=$________.

**解:** 因为 $|\boldsymbol{B}|=10 \neq 0$, 即 $\boldsymbol{B}$ 可逆. 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. □ 3.285

*Example* 147. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 则 $k=$____________.

**解:** 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 知 $|\boldsymbol{A}|=0$. 又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3,$$

得 $k=-3$, 或 $k=1$ (此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 舍去). 故 $k=-3$. □ 3.286

*Example* 148. 设 $n\,(n \geqslant 3)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 则 $a$ 必为 【 】

(A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) $-1$. (D) $\frac{1}{n-1}$.

**解:** 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 知 $|\boldsymbol{A}|=0$. 又

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}=[1+(n-1)\,a]\,(1-a)^{n-1},$$

得 $a=\frac{1}{1-n}$, 或 $a=1$. 而 $a=1$ 时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 舍去. 选 (B). □ 3.287

*Example* 149. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 $r_1$, 则 【　】

(A) $r>r_1$;　　(B) $r<r_1$;

(C) $r=r_1$;　　(D) $r$ 与 $r_1$ 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定.

**解:** 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$, 及 $\boldsymbol{C}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵, 知 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$, 故选 (C).

这个题目很基本: 可逆矩阵与矩阵相乘, 不改变矩阵的秩. 见教材矩阵秩的性质 3. 其根源是初等变换不改变矩阵的秩. □ 3.288

*Example* 150. 若 $\boldsymbol{A}_{n\times m}\boldsymbol{B}_{m\times n}=\boldsymbol{I}_n$ $(n<m)$, 证明: $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{B}_{m\times n}\right)=n$.

**证:** 注意到 $n<m$, 有

$$\begin{aligned}n=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n\right)&=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{n\times m}\boldsymbol{B}_{m\times n})\\&\leqslant\mathrm{r}\left(\boldsymbol{B}_{m\times n}\right)\leqslant\min\{n,m\}=n,\end{aligned}$$

所以, $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{B}_{m\times n}\right)=n$. □ 3.289

*Example* 151. 试证: $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 当且仅当方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解.

**证:** 当方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解时, 由于 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解, 故两方程组同解, 于是其系数矩阵的秩相同.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 时, 记 $W_{AB}$, $W_B$ 分别为方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的全体解向量. 则

$$\dim W_{AB}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\dim W_B.$$

又 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解, 即 $W_B\subseteq W_{AB}$, 所以必有 $W_B=W_{AB}$. 故两方程组同解, 得方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解. □ 3.290

*Example* 152. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 试证对任意可乘的矩阵 $\boldsymbol{C}$, 均有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})$.

**证:** 由 151 题, 只需证明: 方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{BCx}=\mathbf{0}$ 的解.

设 $\boldsymbol{y}_0$ 为 $\boldsymbol{ABCx}=\mathbf{0}$ 的解, 即 $\boldsymbol{ABCy}_0=\mathbf{0}$, 下证 $\boldsymbol{BCy}_0=\mathbf{0}$.

记 $\boldsymbol{Cy}_0=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{ABx}_0=\mathbf{0}$. 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 由 151 题知 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解, 故 $\boldsymbol{Bx}_0=\mathbf{0}$. 即 $\boldsymbol{BCy}_0=\mathbf{0}$. □ 3.291

### 7.2.4 解矩阵方程

求解形如 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的方程, 仍然可以使用初等变换的方法 (假定 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆). 分两步:

(i) 由初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}),$$

算得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$;

(ii) 由初等列变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\\hdashline\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\\hdashline\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}\end{pmatrix},$$

得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$. 3.292

*Example* 153. 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**解:** 记方程组为 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 + r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \div 6]{r_1 - \frac{2}{3} r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right),$$

即 $\boldsymbol{XB} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. 又 3.293

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{B} \\ \hdashline \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 + c_2} \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \div 2} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right),$$

所以, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. □ 3.294