

Chapter 3

线性方程组

Linear Algebra

December 28, 2016

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

3.1

目录

1	n 维向量及其线性相关性	3
2	向量组的秩及其极大线性无关组	10
3	矩阵的秩 相抵标准形	12
4	齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构	23
5	非齐次线性方程组有解的条件及解的结构	30
6	习题	38
7	总结与复习	68
7.1	本章要点	68
7.2	题型举例	72
7.2.1	向量组的线性相关性	72
7.2.2	线性方程组的解	77
7.2.3	矩阵的秩	83
7.2.4	解矩阵方程	85

3.2

为什么要讨论向量?

本章的题目是“线性方程组”,但是先要讲的是“向量”这个话题.为什么?

主要意义:代数与几何相结合.用几何的观点理解、表达代数.

比如线性方程组的问题,等同于“向量的线性表示”的问题.例如,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 23. \end{cases}$$

可以等价地表示为

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

这相当于讨论向量 $\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix}$ 能否由向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

3.3

线性表示.

易得 $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$. 即向量 β 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并且线性表示的系数分别是 2, 3, 1. 即

$$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3.$$

3.4

阅读 & 思考

阅读本章, 请注思考两个重要问题:

- 什么是极大无关组?
- 秩的本质是什么?

概略地说, 这两个概念要结合几何意义去理解.

极大无关组相当于坐标系. 例如在三维空间取定 10 个非零向量, 假设它们都在同一个平面内, 那么在这些向量中随便找两个不共线的向量, 就可以线性表示余下的所有向量. 这两个向量就是一个极大无关组, 它们就像坐标系一样, 可以组合出这个平面内的任意向量.

这个极大无关组中所含向量的个数, 就是这 10 个向量的秩. 其本质是这 10 个三维向量所能构成的子空间的维数. 它们都在一个平面上, 最多只能构成一个 2 维子空间.

矩阵的秩, 表面上是高斯消元法过程中, 最后剩下的非零行的行数.

矩阵的秩, 其本质是: 矩阵的行向量 (或者列向量) 所张成的子空间的维数. 或者说, 构成矩阵的向量, 矗立在空间中, 它们所在的子空间的最小维数, 就是矩阵的秩.

3.5

Warning

本章还将学习全书最重要的结论: 线性方程组解的结构.

另外要非常熟悉以下知识点:

- (1) $Ax = 0$ 只有零解的充要条件; 有非零解的充要条件.
- (2) $Ax = b$ 无解、有唯一解、有无穷多解的充要条件.

3.6

1 n 维向量及其线性相关性

Definition 1 (n 维向量). 数域 F 上的 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的有序数组, 称为数域 F 上的一个 n 元向量, 简称 n 维向量, 记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量.

- 当 F 取 \mathbb{R} 时, α 为实向量;
- 当 F 取 \mathbb{C} 时, α 为复向量.

本课程一般只讨论实向量.

n 维向量可以写成一行,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

也可以写成一列,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

分别称为行向量和列向量, 也就是行矩阵和列矩阵, 并规定行向量和列向量都按矩阵的运算规则进行运算.

因此, n 维列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

与 n 维行向量

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

是两个不同的向量.

数域 F 上的全体 n 元向量组成的集合, 记作 F^n , 称为数域 F 上的 n 维向量空间.

例如 n 维实向量的全体组成的集合为

$$\mathbb{R}^n = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \},$$

\mathbb{R}^n 叫做 n 维实向量空间.

Definition 2. 设 $\alpha_i \in F^n, k_i \in F, i = 1, 2, \dots, m$, 则向量

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 在数域 F 上的一个线性组合. 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的所有线性组合构成的集合称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的张成 (span). 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的张成记为 $\text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Definition 3. 给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量 β , 如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m,$$

则称向量 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示 (或线性表出).

3.11

线性方程组的又一个等价表达

设有线性方程组 $Ax = b$, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵. 记


$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b,$$

即线性方程组可等价地表示为

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b.$$

 向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 等价于方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b$$

有解.

例如, 设 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})^T$, $\alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})^T$, $\alpha_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})^T$,

则


$$\begin{aligned} & x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = b$$

等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4. \end{cases}$$

 方程的个数 = 向量的维数. $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 是行向量时, 结果完全相同.

3.13

Definition 4. 给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F^n$, 若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m \in F$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}, \quad (1)$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 (linearly dependent); 否则, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 (linearly independent).

由定义立即可得:

Theorem 5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 等价于齐次方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

有非零解.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 等价于齐次方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

只有零解.

对于只含有一个向量 α 的向量组, 若存在 $k \neq 0$, 使得

$$k\alpha = \mathbf{0},$$


则

$$\alpha = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

若 $\alpha \neq \mathbf{0}$, 要使

$$k\alpha = \mathbf{0},$$

必须 $k = 0$.

 当 $\alpha = \mathbf{0}$ 时, 向量组 α 线性相关. 当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时, 向量组 α 线性无关.

Theorem 6. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性相关的充分必要条件: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可以由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

证: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m,$$

即 α_1 能由 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可以由其余 $m - 1$ 个向量线性表示, 不妨设 α_1 能由 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 即

$$\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \dots + \lambda_m\alpha_m,$$

于是

$$(-1)\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \dots + \lambda_m\alpha_m = \mathbf{0}.$$

而 $-1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ 不全为零, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

证明线性无关的方法

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关的最基本方法: 说明齐次方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

只有零解.

也常常表述为: 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

然后说明上式成立, 只能有唯一的选择: $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$.

3.18

Example 7. 设 n 维向量

$$\varepsilon_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

即第 i 个分量为 1, 其余分量为 0, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关.

证: 设

$$x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_m\varepsilon_m = \mathbf{0}.$$

即

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathbf{0},$$

故只能有 $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. 得证 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关. \square


3.19

n 维向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为基本向量.

F^n 中任何向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都可以由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示, 即

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n.$$

这和 \mathbb{R}^3 中的基本向量 i, j, k 类似.

 基本向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 在向量空间 F^n 中充当了坐标系的功能.

3.20

Example 8. 包含零向量的向量组是线性相关的.

证: 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 不妨设 $\alpha_1 = \mathbf{0}$. 则称在不全为零的数 $1, 0, 0, \dots, 0$, 使得

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = \mathbf{0},$$

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关. \square

3.21

Example 9. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一部分向量线性相关, 则整个向量组也线性相关.

证: 不妨设前 j 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ 线性相关, $j \leq m$. 则存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_j 使


$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_j\alpha_j = \mathbf{0},$$

从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_j, 0, \dots, 0$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_j\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \dots + 0\alpha_m = \mathbf{0},$$

得证整个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关. \square

其逆否命题是: 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则其任一部分向量组都线性无关.

 部分相关, 则整体相关; 整体无关, 则部分无关.

3.22


Theorem 10. 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

证: 对向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in F^n$, 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_{n+1}\alpha_{n+1} = \mathbf{0}.$$

注意到此齐次线性方程组中, 未知量个数为 $n+1$, 而方程个数为 n , 故方程组一定有无穷多解, 从而必有非零解.

得证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 线性相关. \square

 向量的个数 $>$ 向量的维数 \implies 向量组必线性相关.

3.23

Theorem 11 (\boxtimes). 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 设有不全为零的 k, k_1, \dots, k_r 使得

$$k\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}, \quad (2)$$

则必有 $k \neq 0$. 事实上, 假若 $k = 0$, 则 (2) 式为

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r = \mathbf{0},$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故必有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0.$$

这与 k, k_1, \dots, k_r 不全为零矛盾.

3.24

从而

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_r}{k}\alpha_r,$$

即证 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

下证表示法唯一. 设 β 有两种表示:

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_r\alpha_r, \quad \beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_r\alpha_r,$$

两式相减得

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \dots + (l_r - h_r)\alpha_r = \mathbf{0}.$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故必有

$$l_1 - h_1 = l_2 - h_2 = \dots = l_r - h_r = 0,$$

即 $l_i = h_i, i = 1, 2, \dots, r$. 得证表示法唯一. \square

3.25

Corollary 12. 如果 F^n 中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则 F^n 中的任一向量 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 由“任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关”, 故 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关. 由前述定理得到结论成立. \square

Example 13. 设 $\alpha_1 = (1, -1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0), \alpha_3 = (1, 0, 3), \alpha_4 = (2, -3, 7)$. 问:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否线性相关?
2. α_4 可否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 如能表示, 求其表示式.

解: (1) 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-3c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

故齐次方程组 (3) 只有零解. 即证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 由“任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关”知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一.

设

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3,$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & 2 & 0 & | & -3 \\ 1 & 0 & 3 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2+3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 7 & | & 14 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3 \div 7]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

故 $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$. \square

Example 14 (P.118 例 5). 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 又 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$. 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

证: 因为

$$\beta_1 = -\beta_2 + 2\beta_3,$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. \square

Theorem 15. 1. 如果一组 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量, 所得到的新向量组 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$ 也线性无关.

2. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 那么它们各去掉相同的若干个分量, 所得到的新向量组也是线性相关的.

证: 两者互为逆否命题, 证明第一个即可.

向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

只有零解. 设 $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}), i = 1, 2, \dots, s$, 则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ns}x_s = 0. \end{cases} \quad (4)$$

3.30

不妨设每个向量增加了一个分量, 即

$$\alpha_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}, a_{n+1,i}), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

设

$$x_1\alpha_1^* + x_2\alpha_2^* + \dots + x_s\alpha_s^* = \mathbf{0},$$

则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ns}x_s = 0, \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,s}x_s = 0. \end{cases} \quad (5)$$

方程组 (5) 的解全是方程组 (4) 的解.

而方程组(4)只有零解, 故方程组 (5)也只有零解. 得证向量组 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$ 线性无关. □

3.31

设向量组线性相关, 若增加的分量全为零, 则得到的新向量组也线性相关.

事实上, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 把这些向量各任意添加 m 个全为 0 的分量, 所得到的新向量组记为 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$.

此时方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1\alpha_1^* + x_2\alpha_2^* + \dots + x_s\alpha_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同. 所以新向量组 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$ 也线性相关. □

☞ 总之, 对应位置全为 0 的分量, 不影响向量组的线性相关性.

3.32

Example 16. 考察下列向量的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

解: 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关, 故原向量组线性无关. □

3.33

2 向量组的秩及其极大线性无关组

Definition 17. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在 r 个线性无关的向量, 且其中任一个向量都可以由这 r 个线性无关的向量线性表示, 则数 r 称为向量组的秩 (rank), 记作

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r.$$

或 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r.$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

只含有零向量的向量组的秩为 0. 只含有一个非零向量的向量组的秩为 1.

3.34

Definition 18. 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 中的每一个向量可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 就称向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示. 如果两个向量组可以互相线性表示, 则称这两个向量组是等价的.

向量组的线性表示, 具备:

- 自反性. 即向量组自己可以线性表示自己.
- 传递性. 设向量组 A 可以被向量组 B 线性表示, 向量组 B 又可以被向量组 C 线性表示, 则向量组 A 可以被向量组 C 线性表示.


但不具备对称性. 即: 向量组 A 可以被向量组 B 线性表示, 不一定有向量组 B 可以被向量组 A 线性表示.

3.35

向量组的等价, 具备:

1. 自反性: 任一向量组和自身等价.
2. 对称性: 向量组 A 与向量组 B 等价, 当然向量组 B 与向量组 A 等价.
3. 传递性: 设向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 又与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

3.36

 部分总可以由整体线性表示; 但反之不成立.

例如设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的前 t 个向量, $t \leq s$. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

3.37

Theorem 19. 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关.

证: 比如, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以由 α_1, α_2 线性表示, 记

$$\beta_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2, \quad \beta_2 = k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2, \quad \beta_3 = k_{13}\alpha_1 + k_{23}\alpha_2.$$

设

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \mathbf{0},$$

则

$$(x_1k_{11} + x_2k_{12} + x_3k_{13})\alpha_1 + (x_1k_{21} + x_2k_{22} + x_3k_{23})\alpha_2 = \mathbf{0}. \quad (6)$$

无论 α_1, α_2 线性相关或线性无关, 只要

$$\begin{aligned} x_1k_{11} + x_2k_{12} + x_3k_{13} &= 0, \\ x_1k_{21} + x_2k_{22} + x_3k_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

都可以使 (6) 成立. 而线性方程组 (7) 中未知量个数 3 大于方程个数 2, 故有无穷多解, 故存在非零解. 得证 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. 3.38

Corollary 20. 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 则 $t \leq s$.

Corollary 21. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的.

证: 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的 r 个线性无关的向量, 由于该向量组中任一个向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 所以其中任何 $r+1$ 个向量都线性相关. □ 3.39


Definition 22 (向量组的秩的另一个定义 & 极大线性无关组). 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. 如果在其中能选出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 满足

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关,

那么称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是原向量组的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

极大线性无关组所含向量个数 r , 则称为原向量组的秩.

极大无关组也常常称为最大无关组.

 极大无关组和原向量组是等价的.

极大无关组是原向量组的全权代表. 3.40

Corollary 23. 设

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r, \quad r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = p,$$

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 则

$$r \leq p.$$

证: 不妨设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 分别是两个向量组的极大无关组. 由线性表示的传递性知, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性表示. 而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关, 故

$$r \leq p.$$

证: 等价向量组的秩相等.

3.41

3 矩阵的秩 相抵标准形

本节将得到一个重要的结果: **初等变换不改变矩阵的秩.**

3.42

Definition 24 (行秩 & 列秩). • 对于矩阵 A , 把它的每一行称为 A 的一个行向量. 把 A 的行向量组的秩, 称为矩阵 A 的行秩.

- 对于矩阵 A , 把它的每一列称为 A 的一个列向量. 把 A 的列向量组的秩, 称为矩阵 A 的列秩.

证: 对 $m \times n$ 阶矩阵 A ,

- A 的行秩 $\leq m$;
- A 的列秩 $\leq n$.

3.43

证: 结论: 阶梯形矩阵的行秩等于列秩, 其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数. 例如阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$. A 的行秩 = 3, 列秩 = 3. 事实上, 把 A 按行和列分块为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5).$$

下证 a_{11}, a_{23}, a_{34} 所在的行, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关; 它们所在的列, 即 $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ 也必线性无关.

3.44

(1) 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

对比第一个分量, 得

$$x_1 a_{11} = 0,$$

而 $a_{11} \neq 0$, 故 $x_1 = 0$. 从而

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

对比第 3 个分量, 得

$$x_2 a_{23} = 0,$$

而 $a_{23} \neq 0$, 故 $x_2 = 0$. 从而

$$x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

同理得 $x_3 = 0$. 得证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

又 $\alpha_4 = \mathbf{0}$, 而零向量 $\mathbf{0}$ 可以由任何向量组线性表示, 这里

$$\mathbf{0} = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3.$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大无关组. 所以矩阵 A 的行秩为 3.

(2) 设

$$y_1\beta_1 + y_3\beta_3 + y_4\beta_4 = \mathbf{0}.$$

即

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对比第 3 个分量, 得 $y_4 = 0$. 从而

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对比第 2 个分量, 得 $y_3 = 0$. 从而

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对比第 1 个分量, 得 $y_1 = 0$. 故 $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ 线性无关.

去掉向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 的最后一个分量, 所得的新向量记为 B^* : $\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \beta_4^*, \beta_5^*$. 注意到去掉的分量全为 0, 故这两个向量组的线性相关性是一致的.

由 $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ 线性无关, 则 $\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$ 也线性无关.

因任意 4 个 3 维向量必线性相关, 故 $\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$ 为向量组 B^* 的极大无关组, 即向量组 B^* 中任何一个向量都可以由 $\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$ 线性表示, 从而向量组 B 中的任何一个向量都可以由 $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ 线性表示 (且表示系数与前者相同).

得证 $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ 是向量组 B 的极大无关组, 即矩阵 A 的列秩为 3. \square

Theorem 25. 初等行变换不改变矩阵的行秩.

证: 给定矩阵 $A_{m \times n}$, 对其进行一次初等行变换, 所得的矩阵记为 B , 下证两矩阵的行秩相等.

记矩阵 $A_{m \times n}$ 的行向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

(1) 设 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$, 因矩阵 B 的行向量仍然是 A 的 m 个行向量, 故 B 的行秩等于 A 的行秩.

(2) 设 $A \xrightarrow{r_i \times c} B$, 其中 $c \neq 0$. 因 B 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_m$ 与 A 的行向量组等价, 故 B 的行秩等于 A 的行秩.

(3) 设 $A \xrightarrow{r_i + cr_j} B$. 因 B 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_m$ 与 A 的行向量组等价, 故 B 的行秩等于 A 的行秩.

得证初等行变换不改变矩阵的行秩. \square

3.49

Theorem 26. 初等行变换不改变矩阵的列秩.

证: 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = B,$$

在 A, B 中相同位置任意取某 s 个列向量:

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}, \quad \text{和} \quad \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_s}.$$

分别记为向量组 A^* 和向量组 B^* . 设

$$x_1\alpha_{i_1} + x_2\alpha_{i_2} + \dots + x_s\alpha_{i_s} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$x_1\beta_{i_1} + x_2\beta_{i_2} + \dots + x_s\beta_{i_s} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

注意到方程组 (9) 是由方程组 (8) 经过高斯消元法得到 (其步骤相同于矩阵 A 初等行变换得到 B 的过程), 故两方程组同解. 即向量组 A^* 和向量组 B^* 有完全相同的线性关系. 得证矩阵 A, B 列秩相等 (列向量的极大无关组在相同位置产生). \square

3.50

Example 27. 设向量组: $\alpha_1 = (1, 0, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 3, 0)^T$, $\alpha_4 = (2, 5, -1, 4)^T$, $\alpha_5 = (1, -1, 3, -1)^T$. 试求向量组的秩及一个极大无关组, 并将其余的向量用这个极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 由

$$A \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - 2r_1 \\ r_4 - r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 + r_2 \\ r_4 \div (-2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 + r_2 \\ r_1 - 2r_4 \\ (r_2 - r_4) \div 2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 \leftrightarrow r_4 \\ r_1 - r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得秩为 3, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构成一个极大无关组, 且 $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_5 = -\alpha_2 + \alpha_3$. □

3.51

同理, 初等列变换不改变矩阵的行秩和列秩.

Theorem 28. 初等变换不改变矩阵的行秩和列秩.

Theorem 29. 矩阵的行秩等于其列秩.

证: 对 A 做初等行变换得到阶梯矩阵 U , 则有

$$\begin{aligned} A \text{ 的行秩} &= U \text{ 的行秩} \\ &= U \text{ 的列秩} = A \text{ 的列秩.} \end{aligned}$$

Definition 30 (矩阵的秩). 矩阵的行秩或列秩的数值, 称为矩阵的秩. 记作

$$r(\mathbf{A}), \quad \text{或} \quad R(\mathbf{A}), \quad \text{或} \quad \text{rank}(\mathbf{A}).$$

3.52

Definition 31. 对 n 阶方阵 A , 若

$$r(\mathbf{A}) = n,$$

则称 A 为满秩矩阵. 否则, 称为降秩矩阵.

Theorem 32. 下列表述等价:

- A 为满秩矩阵.
- A 为可逆矩阵.
- A 为非奇异矩阵.
- $|A| \neq 0$.

反之, A 为降秩矩阵 $\iff A$ 为不可逆矩阵 $\iff A$ 为奇异矩阵 $\iff |A| = 0$.

3.53

证: 只需证明前两个表述等价.

设 $r(\mathbf{A}) = n$, 记 A 的行简化阶梯形矩阵为 B , 则 B 有 n 个非零行, 由行简化阶梯形矩阵的结构, 知 $B = I$. 即存在可逆矩阵 P , 使得

$$PA = I.$$

故 $A^{-1} = P$, 得证 A 可逆.

若 A 可逆, 记 $A^{-1} = P_0$, 则

$$P_0A = I.$$

即 A 经过初等行变换可以得到 I , 故 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{I}) = n$. □

3.54

☞ (1) $r(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0}$. (2) 对任意的非零矩阵 A , $r(\mathbf{A}) \geq 1$.

3.55

Definition 33. 在 $m \times n$ 阶矩阵 \mathbf{A} 中, 任取 k 行与 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们在 \mathbf{A} 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

称为矩阵 \mathbf{A} 的 k 阶子行列式, 简称 k 阶子式.

- 当 (10) 式等于零时, 称为 k 阶零子式; 否则, 称为 k 阶非零子式.
- 当 (10) 式的 $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_k = i_k$ 时, 称为矩阵 \mathbf{A} 的 k 阶主子式.

3.56

Example 34. 在 5×6 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

中, 取某 3 行、某 3 列, 得到 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

若取第 2, 4, 5 行, 第 2, 4, 5 列,


$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

得到 3 阶主子式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

3.57

Definition 35. 如果矩阵 \mathbf{A} 中有一个 r 阶的非零子式 D , 且所有 $r + 1$ 阶子式 (如果存在的话) 全等于 0, 则 D 称为矩阵 \mathbf{A} 的最高阶非零子式.


 若所有 $r + 1$ 阶子式全等于 0, 则所有 $r + 2$ 阶子式 (如果存在的话) 全等于 0. (行列式按一行展开即得.) 从而, 所有阶数高于 $r + 1$ 的子式全为 0.

3.59

Theorem 36. $r(\mathbf{A}) = r$ 的充分必要条件是 \mathbf{A} 的非零子式的最高阶数为 r .

证: 必要性. 设 $r(\mathbf{A}) = r$, 则 \mathbf{A} 的行秩为 r . 不妨设 \mathbf{A} 的前 r 行构成的矩阵 \mathbf{A}_1 的行秩为 r , 其列秩也为 r ; 不妨再设 \mathbf{A}_1 的前 r 个列向量线性无关. 则 \mathbf{A} 的左上角 r 阶子式为非零子式. 又因为 \mathbf{A} 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关, 所以 \mathbf{A} 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式 (因为其中有一行可以由其余 r 行线性表示), 因此, \mathbf{A} 的非零子式的最高阶数为 r .

充分性. 不妨设 \mathbf{A} 的左上角 r 阶子式 $|\mathbf{A}_r| \neq 0$, 于是 \mathbf{A}_r 可逆, 其 r 个行向量线性无关, 将它们添加分量成为 \mathbf{A} 的前 r 个行向量, 它们也线性无关; 而 \mathbf{A} 的任何 $r+1$ 个行向量必线性相关 (否则由必要性的证明可知 \mathbf{A} 中存在 $r+1$ 阶非零子式, 这与题设矛盾), 故 \mathbf{A} 的行秩 $= r(\mathbf{A}) = r$. \square

 此定理可以作为矩阵秩的另一个定义.

3.60

矩阵秩的性质

性质 0 $\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$. 特别地, 当 $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ 为非零列向量时, 有

$$r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq r(\mathbf{A}) + 1.$$

即

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{cases} r(\mathbf{A}), & \text{当且仅当 } \mathbf{b} \text{ 可以被 } \mathbf{A} \text{ 的列向量线性表示;} \\ r(\mathbf{A}) + 1, & \text{当且仅当 } \mathbf{b} \text{ 不能被 } \mathbf{A} \text{ 的列向量线性表示.} \end{cases}$$

3.61

例如, 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(1) 取 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{c_3 - (c_1 + 2c_2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{A}, \mathbf{0}),$$

故

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{0}) = r(\mathbf{A}).$$

3.62

(2) 取 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

\mathbf{b} 不能由 \mathbf{A} 的列向量线性表示, 故

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) + 1.$$

3.63

证: 因为 \mathbf{A} 的列均可由 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的列线性表出, 所以

$$r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (11)$$

同理 $r(\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. 所以

$$\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 为 \mathbf{A} 的列向量的极大线性无关组, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$ 为 \mathbf{B} 的列向量的极大线性无关组. 则 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的列向量均可由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$ 线性表出, 所以

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s).$$

3.64

而向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$ 的秩不可能超过其向量的个数 $r + s$, 即 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$, 所以

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}). \quad (12)$$

得证 $\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$. \square

注

- 对 (11) 式的朴素理解是, 在矩阵 \mathbf{A} 的右侧添加新的列, 只会有可能使秩在原来的基础上得到增加; 当 \mathbf{B} 的列向量能被 \mathbf{A} 的列向量线性表出时, 等号成立.
- 对 (12) 式的朴素理解是, 对矩阵 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , 有可能 \mathbf{A} 的列向量与 \mathbf{B} 的列向量出现线性相关, 合并为 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的秩一般会比 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$ 要小. 当 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 两者列向量的极大线性无关组线性无关时, (12) 式的等号成立. 更极端的情形是 \mathbf{A} 的列向量组与 \mathbf{B} 的列向量组线性无关.

3.65

此性质还可以写成

$$\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

上式第一个不等号也是说明, 给一个矩阵添加行, 有可能使得矩阵的秩增加.

3.66

性质 1 $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

证: 因为 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 的列均可由 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的列线性表出, 所以

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

得证

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}). \quad (13)$$

注意 (12) 式、(13) 式的右侧都是 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$. 就是说把矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 合并、相加, 只可能使秩得以减少.

性质 2 $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$.

证: 矩阵 \mathbf{AB} 的列向量是矩阵 \mathbf{A} 的列向量的线性组合, 事实上, 设

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

知矩阵 \mathbf{AB} 的第 1 列为 $b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{m1}\mathbf{a}_m, \dots$, 第 s 列为 $b_{1s}\mathbf{a}_1 + b_{2s}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{ms}\mathbf{a}_m$.

矩阵 \mathbf{AB} 的列向量可以被矩阵 \mathbf{A} 的列向量线性表示, 故

$$r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A}).$$

类似地, 矩阵 \mathbf{AB} 的行向量是矩阵 \mathbf{B} 的行向量的线性组合, 有 $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$. 得证 $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$. \square

从这个性质及 P.121 推论 3 得到的共同理解是: 对一个向量组进行线性组合, 可能会使向量组的秩减小.

注 \boxtimes

这是一个非常重要的认识:

- 矩阵 \mathbf{AB} 的列向量是矩阵 \mathbf{A} 的列向量的线性组合.
- 矩阵 \mathbf{AB} 的行向量是矩阵 \mathbf{B} 的行向量的线性组合.

性质 3 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{P}, \mathbf{Q} 分别是 m 阶、 n 阶可逆矩阵, 则

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{PAQ}).$$

证: 可逆矩阵可以分解为若干个初等矩阵的乘积, 在矩阵 \mathbf{A} 的左边乘以可逆矩阵, 相当于对 \mathbf{A} 进行若干次初等行变换, 但初等变换不改变矩阵的秩, 故

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}).$$

同理得其他等号成立. \square

Example 37 (例 2). 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, $m < n$, 证明: $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$.

证: 由于 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T) \leq \min\{m, n\} < n$, 由性质 2 有

$$r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{A}^T)\} < n,$$

而 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, 故 $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$. \square

相抵标准形

Definition 38. 若矩阵 A 经过初等变换化为 B (或: 若存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $PAQ = B$), 则称 A 相抵于 B , 记作 $A \cong B$.

或者称 A 等价于 B , 记为 $A \sim B$.

相抵关系满足:

1. 反身性: $A \cong A$.
2. 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$.
3. 传递性: 若 $A \cong B, B \cong C$, 则 $A \cong C$.

相抵是一种等价关系.

3.72

Theorem 39. 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = r$, 则一定存在可逆矩阵 $P_{m \times m}$ 和 $Q_{n \times n}$, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \triangleq U, \quad (14)$$

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵.

证: 对 A 进行初等行变换, 将 A 化为有 r 个非零行的行简化阶梯矩阵 U_1 , 即存在初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s , 使

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U_1.$$

再对 U_1 做初等列变换, 可化为 (14) 式右端的矩阵 U , 即存在初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t , 使得

$$U_1 Q_1 Q_2 \cdots Q_t = U.$$

记 $P = P_s \cdots P_2 P_1, Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$, 则有 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = U. \quad \square$

3.73

Definition 40. 设 $r(A_{m \times n}) = r$, 则矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

称为 A 的相抵标准形, 简称标准形.

注 \triangle

- 秩相等的同型矩阵, 必有相同的标准形.
- 两个秩相等的同型矩阵是相抵的.

3.74

Example 41. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

解: 先求 \mathbf{A} 的秩, 为此对 \mathbf{A} 作初等行变换变成行阶梯形矩阵.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - r_4, r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

3.75

故 $r(\mathbf{A}) = 3$.

再求 \mathbf{A} 的一个最高阶非零子式. 因 $r(\mathbf{A}) = 3$, 知 \mathbf{A} 的最高阶非零子式为 3 阶.

记 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 其阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

中取第一、二、四列, 记为矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

记 $\mathbf{A}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$, 则

$$\mathbf{A}_0 \cong \mathbf{B},$$

3.76


故 $r(\mathbf{A}_0) = r(\mathbf{B}) = 3$. 在

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

取第二、三、四行构成的行列式必不为零.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

因此这个子式便是 \mathbf{A} 的一个最高阶非零子式. \square

 答案显然不唯一. 比如可以在矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5)$, $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5)$ 中找到 3 阶非零子式.

3.77

MATLAB 计算矩阵的秩

MATLAB 中使用命令 $\text{rank}(A)$ 即可以得到矩阵 A 的秩.

```
A =  
  
    3    2    0    5    0  
    3   -2    3    6   -1  
    2    0    1    5   -3  
    1    6   -4   -1    4  
  
>> rank(A)  
  
ans =  
  
    3
```

图 1: MATLAB 中里面由 $\text{rank}(A)$ 得到矩阵 A 的秩.

3.78

矩阵秩的求法

将矩阵 A 进行初等行变换, 得到阶梯型矩阵, 其非零行的行数, 即矩阵 A 秩.

当然也可以使用初等列变换, 或者行变换、列变换穿插进行.

例如教材 P.148 习题 20:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可见 $r(A) = 3$, 其一个最高阶的非零子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.79

3.80

4 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

齐次线性方程组是天然有解的: $(0, 0, \dots, 0)$ 就是它的一组解, 即零解. 所以对于 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 不存在无解的情况, 我们关心的是: 它是否有零之外的解; 若有, 又如何表达这些解.

设有齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 其中 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵.

使用高斯消元法, 矩阵 \mathbf{A} 经初等行变换, 得到其行简化阶梯型形式:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

3.81

\mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 故 $r(\mathbf{A}) \leq n$.

(1) 若 $r(\mathbf{A}) = n$, 则 \mathbf{A} 行简化阶梯型矩阵为 (15) 式中的 \mathbf{V} . 此时方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有唯一解, 即零解.

(2) 若 $r(\mathbf{A}) < n$, 则 \mathbf{A} 行简化阶梯型矩阵为 (15) 式中的 \mathbf{U} . 此时方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有无穷多解.

3.82

Theorem 42. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解的充要条件为

$$r(\mathbf{A}) < n.$$

证: 记 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 可表达为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}.$$

方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解, 等价于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 即

$$r(\mathbf{A}) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n.$$

☞ 若 $m < n$, 则方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 一定非零解. 这里 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵.

3.83

Corollary 43. 当 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵时,

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解的充要条件为 $|\mathbf{A}| = 0$.
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解的充要条件为 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Corollary 44. 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解的充要条件为: $r(\mathbf{A})$ 等于 \mathbf{A} 的列数.

☞ \mathbf{A} 的列数即未知量的个数.

3.84

Example 45. 设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, 证明: 存在 $n \times s$ 矩阵 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, 使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 的充要条件是 $|\mathbf{A}| = 0$.

证: $|A| = 0$ 等价于 $Ax = 0$ 有非零解. 下证 “ $Ax = 0$ 有非零解” 等价于 “存在 $n \times s$ 矩阵 $B \neq 0$ 使得 $AB = 0$ ”.

(1) 设 $AB = 0$, 则 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解. 又 $B \neq 0$, 则 B 中至少有一个列向量 $\beta_i \neq 0$, 从而方程组 $Ax = 0$ 至少有一个非零解 β_i .

(2) 设 $Ax = 0$ 有非零解, 任取其一非零解 β , 令

$$B = (\beta, 0, \dots, 0),$$

则 $B \neq 0$, 且满足 $AB = 0$. □

3.85

齐次线性方程组解的性质

Theorem 46. 若 x_1, x_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解, 则

$$k_1x_1 + k_2x_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

也是它的解.

证: 因为

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 = k_10 + k_20 = 0.$$

故 $k_1x_1 + k_2x_2$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解. □

3.86

Definition 47. 设 x_1, x_2, \dots, x_p 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量, 如果:

1. x_1, x_2, \dots, x_p 线性无关;
2. $Ax = 0$ 的任一个解向量可由 x_1, x_2, \dots, x_p 线性表示,

则称 x_1, x_2, \dots, x_p 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.



- 基础解系即全部解向量的极大无关组.
- 找到了基础解系, 就找到了方程组的全部解: $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_px_p$, (k_1, k_2, \dots, k_p 为任意常数).
- 基础解系不唯一.

3.87

Example 48. 设线性方程组只含有一个方程

$$x + y + z = 0.$$

求方程组的解.

解: (1) 选取 y, z 为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x = -y - z, \\ y = y, \\ z = z. \end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c_1, c_2 为任意常数.

(2) 选取 x, z 为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x = x, \\ y = -x - z, \\ z = z. \end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c_1, c_2 为任意常数.

(3) 选择 x, y 为自由未知量. (略)

上述得到 3 个不同的基础解系:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

一般地, 对方程组 $Ax = 0$, 将 A 进行初等行变换, 得到行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

则原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - c_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - c_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - c_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{rn}x_n, \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ x_{r+2} = x_{r+2}, \\ \vdots \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

视 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ 为自由未知量.

3.91

等价于

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.92

等价于

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.93

全书最重要的结论

Theorem 49 (★). 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(\mathbf{A}) = r < n$, 则齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 存在基础解系, 且基础解系含 $n - r$ 个解向量.

“ $n - r$ ” 的含义

- r 是 \mathbf{A} 的秩, 也是 \mathbf{A} 的行阶梯型矩阵的非零行的行数, 是非自由未知量的个数. (非自由未知量一般取自非零行的第一个非零元所对应的未知量, 一个非零行只能确定一个非自由未知量.)

- n 是未知量的总数, 所以 $n - r$ 是自由未知量的个数. 有多少个自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量.

Example 50. 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$
 的基础解系.

解:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 \div 8]{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以原方程组等价于
$$\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4, \end{cases}$$
 即

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

因此基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ 或 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

或者, 由

$$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

视 x_2, x_3 为自由未知量, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_4 = 4x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = 4x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

得一组基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 0, 4)^T, \quad \xi_2 = (-4, 0, 1, -3)^T.$$

3.97

Example 51. 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系.

解: 原方程即为

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}.$$

或者

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-1}, \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}. \end{cases}$$

所以基础解系为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

3.98

Example 52. 写出一个以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

解: 把解的形式改写为

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

3.99

3.100

等价于

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

得一个所求的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

3.101

Example 53 (常用性质 \boxtimes). 设 \mathbf{A} , \mathbf{B} 分别是 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. 证明:

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n.$$

证: 由 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 知, \mathbf{B} 的列向量是线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解. 故 \mathbf{B} 的列向量组的秩, 不超过 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系的秩. 即

$$r(\mathbf{B}) \leq n - r(\mathbf{A}).$$

得证 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$. □

3.102

Example 54. 设 n 元齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解, 证明 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

证: 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解, 故有相同的基础解系, 基础解系包含的向量个数相等, 即

$$n - r(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{B}),$$

得证 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. □

\boxtimes 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解, 则必有 \mathbf{A} 的行向量与 \mathbf{B} 的行向量等价, 故 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. □

3.103

Example 55 (有用的结论). 证明 $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.

证: 只需证明齐次方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解.

若 \mathbf{x} 满足 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 则有 $\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$, 即 $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

若 \mathbf{x} 满足 $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 则

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = 0,$$

即

$$(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ax}) = 0,$$

故 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

综上可知方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解, 因此 $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$. □

\boxtimes 对 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 若 $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

3.104

5 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

Theorem 56. 对于非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 下列命题等价:

- (i) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解 (或相容);
- (ii) \mathbf{b} 可以由 \mathbf{A} 的列向量组线性表示;
- (iii) 增广矩阵 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) 的秩等于系数矩阵 \mathbf{A} 的秩.

证: 先证 (i) \Leftrightarrow (ii). 记 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 可等价地表为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}.$$

因此 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解等价于: 向量 \mathbf{b} 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

再证 (ii) \Leftrightarrow (iii). 若向量 \mathbf{b} 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) 的列向量组与 \mathbf{A} 的列向量组等价, 故 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$.

反之, 若 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$, 则向量 \mathbf{b} 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 否则, $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) + 1$, 导致矛盾.

或者, 由性质

$$r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq r(\mathbf{A}) + 1,$$

即

$$r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{cases} r(\mathbf{A}), & \text{当且仅当 } \mathbf{b} \text{ 可以被 } \mathbf{A} \text{ 的列向量线性表示;} \\ r(\mathbf{A}) + 1, & \text{当且仅当 } \mathbf{b} \text{ 不能被 } \mathbf{A} \text{ 的列向量线性表示.} \end{cases}$$

故 (ii) \Leftrightarrow (iii). □

$r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) + 1$ 即出现矛盾方程

记 $r(\mathbf{A}) = r$. 若 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) + 1$, 则增广矩阵 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) 的经初等行变换所得的行阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

其中 $d_{r+1} \neq 0$ (否则 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r$).

这意味着出现了矛盾方程

$$0 = d_{r+1}.$$

这导致方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 无解.

Example 57. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10, & \textcircled{1} \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 15, & \textcircled{2} \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - 14x_4 = 32, & \textcircled{3} \\ -3x_1 + 3x_2 + 11x_4 = -20. & \textcircled{4} \end{cases}$$

解: 将其增广矩阵用初等行变换化为行阶梯型矩阵:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 2 & -2 & -1 & -8 & 15 \\ 4 & -4 & 1 & -14 & 32 \\ -3 & 3 & 0 & 11 & -20 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4+3r_1]{r_2-2r_1, r_3-4r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

出现矛盾方程 $0 = 7$, 故方程组无解. □

3.108

- 矛盾方程总可以化为 $0 = 1$.
- 无解的根本原因: 确有方程组相互矛盾. 例如, $(\textcircled{2} + \textcircled{3}) \div (-2)$, 得


$$-3x_1 + 3x_2 + 11x_4 = -\frac{47}{2},$$

这与 $\textcircled{4}$ 矛盾.

3.109


Corollary 58. $Ax = b$ 有唯一解的充分必要条件是

$$r(A, b) = r(A) = A \text{ 的列数.}$$

 A 的列数 = 未知量的个数.

此时, 增广矩阵 (A, b) 的经初等行变换所得的行简化阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

 $Ax = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

3.110

Theorem 59. 若 x_1, x_2 是 $Ax = b$ 的解, 则 $x_1 - x_2$ 是对应齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

证: 因为

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

故 $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解. □

Theorem 60. 若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则其一般解 (或称通解) 为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \bar{\mathbf{x}},$$

其中 \mathbf{x}_0 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个特解 (某一个解), 而

$$\bar{\mathbf{x}} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_p\mathbf{x}_p$$

是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一般解.

即 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_p\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_0,$$

其中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_p$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, \mathbf{x}_0 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个特解.

☞ “ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解” = “ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解” + “ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的特解”.

Example 61. 解线性方程组
$$\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1. \end{cases}$$

解: 对方程的增广矩阵实施初等行变换:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 \div 2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}, \\ w = 0. \end{cases} \quad (17)$$

等价于

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 0w + \frac{1}{2}, \\ y = y, \\ z = z, \\ w = 0. \end{cases}$$

等价于

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

所以原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意实数.

☞ 熟悉该方法后, 实际解题时, 可以省略 (17) 式和(18) 式这两个步骤.

Example 62. 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

解: 对增广矩阵进行初等行变换:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1-r_3, r_3+\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2}, \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2}. \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Example 63 (重要题型★). 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda, \end{cases}$$

问 λ 取何值时, 此方程组 (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 由克拉默法则知 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时方程组有唯一解. 又

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ 3+\lambda & 1+\lambda & 1 \\ 3+\lambda & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3+\lambda)\lambda^2. \end{aligned}$$

故 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解.

当 $\lambda = 0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

第 2 个方程与其他方程矛盾, 故方程组无解.

当 $\lambda = -3$ 时, 原方程组的增广矩阵


$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1, \\ x_2 = x_3 - 2, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

故 $\lambda = -3$ 时, 方程组有无穷多解, 且通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

 此题考查的是线性方程组解的结构的基本理论, 而该理论是本课程的核心, 故此例题是极重要的题型!

用克拉默法则即可破题. 但此方法只适用于系数矩阵是方阵的情形.

Example 64. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个解, ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

- (1) $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;
- (2) $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

证: (1) 假设 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关.

基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性无关, 则 η^* 可以由 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性表示, 从而 η^* 是齐次方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 这与 η^* 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解矛盾.

所以假设不成立. 即 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

(2) 易知向量组 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 与向量组 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 等价.

又由本题 (1) 的结论, $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 知

$$r(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = r(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = n - r + 1.$$

所以 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关. \square

3.122

Example 65. 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的 s 个解, k_1, \dots, k_s 为实数, 满足 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$. 证明

$$\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解.

证: 因为

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s\boldsymbol{\eta}_s) \\ &= k_1\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_s \\ &= \mathbf{b}(k_1 + \dots + k_s) = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

从而 $\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解. \square

3.123

Example 66. 设非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的系数矩阵的秩为 r , $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n - r + 1$ 个线性无关的解 (由例题 64 知它确有 $n - r + 1$ 个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-r+1} = 1$.

证: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1, \quad (19)$$

下证该向量组是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

由

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \xrightarrow{j=2, \dots, n-r+1} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1),$$

3.124

已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关, 又初等变换不改变向量组的线性相关性, 故向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1$ 线性无关.

从而向量组 $\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1$ 也线性无关, 又注意到该向量组包含的向量个数为 $n - r$, 故它是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任意一个解 \mathbf{x} 可以表示为

$$\mathbf{x} = k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_3(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1) + \dots + k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1,$$

整理得

$$\mathbf{x} = (1 - k_2 - k_3 - \dots - k_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3 + \dots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

记 $k_1 = 1 - k_2 - k_3 - \dots - k_{n-r+1}$, 则 $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{n-r+1} = 1$, 而且

$$\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

3.125

Example 67. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解: (1) 因为

$$\text{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_2, \end{cases}$$

所以方程组 I 的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.126

由

$$\text{II} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases}$$

所以方程组 II 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 方程组 I 与 II 的公共解, 即联立方程组 I 和 II 所得新方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3.127

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_2, \\ x_4 = x_2. \end{cases}$$

得方程组 I 与 II 的公共解为

$$\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

3.128

Example 68. 求四张平面

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

相交于一点的充分必要条件.

解: 四张平面相交于一点的充分必要条件是: 3 元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3, \\ a_4x + b_4y + c_4z = -d_4 \end{cases}$$


有唯一解.

3.129

记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \\ -d_4 \end{pmatrix}.$$

则平面相交于一点的充分必要条件是: $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$. □

 教材 P.27 例 2 就是上述例题. 但其解答“充要条件是系数行列式 $D = 0$ 或 $D_3 \neq 0$ ”是错误的, 其中

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因为 $D = 0$ 即 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq 3$. 当 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1$ 时, 各平面重合; 当 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 2$ 时, 原式约简为直线方程, 即各平面相交于一条直线. 另外, $D_3 \neq 0$ 可以得到 $r(\mathbf{A}) = 3$, 但反之不成立; 且 $D_3 \neq 0$ 得不到 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$.

3.130

6 习题

Exercise 69 (P.146 习题 1). 将向量 α 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解: 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right),$$

得: $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = -\frac{1}{4}$. 故

$$\alpha = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4.$$

3.131

3.132

Exercise 70 (P.146 习题 2). 将向量 α 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合:

$$\alpha = (0, 0, 0, 1), \alpha_1 = (1, 1, 0, 1), \alpha_2 = (2, 1, 3, 1), \alpha_3 = (1, 1, 0, 0), \alpha_4 = (0, 1, -1, -1).$$

解: 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 即

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0, \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 0, \\ 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 0, \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 1. \end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

得 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0$. 故

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_3.$$

3.133

3.134

Exercise 71 (P.146 习题 4). 判别向量组的线性相关性:

$$\beta_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \beta_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \beta_3 = (3, 0, 7, 14)^T.$$

解: 方法一. 观察可以得到 $\beta_3 = 3\beta_1 + \beta_2$, 所以向量组线性相关.

方法二. 因为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{r_2+r_1, r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故 $r\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 2 < 3$, 所以向量组线性相关.

3.135

或者,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-7c_2]{c_1-2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -7 & 3 & -21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $r\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 2$.

3.136

Exercise 72 (P.146 习题 7). 证明: 若 α_1, α_2 线性无关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 也线性无关.

证: 设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) = \mathbf{0}$, 即

$$(k_1 + k_2)\alpha_1 + (k_1 - k_2)\alpha_2 = \mathbf{0}.$$

因为 α_1, α_2 线性无关, 所以只能有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 - k_2 = 0, \end{cases}$$

方程组只有唯一解: $k_1 = 0, k_2 = 0$.

故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 线性无关. \square

3.137

Exercise 73 (P.146 习题 9). 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证: 易证这两个向量组等价, 故结论成立. \square

3.138

Exercise 74 (P.147 习题 11). 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 但其中任意 3 个向量都线性无关, 证明必存在一组全不为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = \mathbf{0}.$$

证: 反证法. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = \mathbf{0}.$$

假若 k_1, k_2, k_3, k_4 中至少有一个等于零, 不妨假设 $k_1 = 0$, 则

$$k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = \mathbf{0},$$

其中 k_2, k_3, k_4 不全为零, 从而得到 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 与题设矛盾.

故 k_1, k_2, k_3, k_4 中没有一个是零. □

3.139

Exercise 75 (P.147 习题 12). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 证明 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

证: (1) 若 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 当然 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

(2) 若已知 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

用反证法: 假设 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.

因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 β 必能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示 (且表示法唯一). 矛盾. □

3.140

Exercise 76 (P.148 习题 17). 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, $n < m$, 证明齐次线性方程组 $(AB)x = \mathbf{0}$ 有非零解.

证: AB 是 $m \times m$ 的矩阵, 而

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq n < m.$$

所以方程组 $(AB)x = \mathbf{0}$ 有非零解. □

3.141

Exercise 77 (P.148 习题 18). 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, B 是由 A 的前 m 行构成的 $m \times n$ 矩阵. 证明: 若 A 的行向量组的秩为 r , 则 $r(B) \geq r + m - s$.

证: 记矩阵 C 为 A 的后 $s - m$ 行, 即

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}.$$

即

$$r(A) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(B) + r(C) \leq r(B) + s - m.$$

即 $r(B) \geq r + m - s$.

或者, 注意到 B 的行向量组 (即 A 的前 m 个行向量) 的极大无关组与 A 的后 $s - m$ 个行向量所构成的向量组中, 包含了 A 的行向量组的极大无关组, 故

$$r(B) + s - m \geq r(A) = r,$$

即 $r(B) \geq r + m - s$. □

3.142

Exercise 78 (P.148 习题 23). 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在非零的 $n \times s$ 矩阵 B 使得 $AB = 0$ 的充要条件是 $r(A) < n$.

☞ 对照教材 P.133 例 1: 设 A 是 n 阶矩阵, 证明: 存在 $n \times s$ 矩阵 $B \neq 0$, 使得 $AB = 0$ 的充要条件是 $|A| = 0$.

证: (充分性). 设 $r(A) < n$, 则 $Ax = 0$ 有非零解, 取 $Ax = 0$ 的 s 个解 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 且其中至少有一个 $\beta_j \neq 0$, 作矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, 则 $B \neq 0$, 且有

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = 0.$$

(必要性). 设存在非零的 $n \times s$ 矩阵 B 使得 $AB = 0$, 则矩阵 B 的列向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 都是方程组 $Ax = 0$ 的解. 因为 B 为非零矩阵, 所以至少有一个 $\beta_i \neq 0$, 即 $Ax = 0$ 有非零解, 从而 $r(A) < n$. \square

3.143

Exercise 79 (P.149 习题 30). 讨论 p, q 取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(1) \begin{cases} (p+3)x_1 & +x_2 & +2x_3 = p, \\ px_1 + (p-1)x_2 & +x_3 = 2p, \\ 3(p+1)x_1 & +px_2 + (p+3)x_3 = 3. \end{cases}$$

解: 系数行列式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p+3 & 1 & 2 \\ p & p-1 & 1 \\ 3(p+1) & p & p+3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} p+3 & 1 & 2 \\ 2p+3 & p & 3 \\ 3(p+1) & p & p+3 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} p+3 & 1 & 2 \\ 2p+3 & p & 3 \\ p & 0 & p \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_3} \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 2 \\ 2p & p & 3 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \\ &= p(p^2 + p - 2p) = p^2(p-1). \end{aligned}$$

3.144

或者

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p+3 & 1 & 2 \\ p & p-1 & 1 \\ 3(p+1) & p & p+3 \end{vmatrix} \\ &= (p-1)(p+3)^2 + 3(p+1) + 2p^2 - 6(p+1)(p-1) - p(p+3) - p(p+3) \\ &= p^2(p-1). \end{aligned}$$

当 $p^2(p-1) \neq 0$, 即 $p \neq 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 方程组有唯一解.

当 $p = 0$ 时, 对增广矩阵作行初等变换:

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

此时方程组无解.

当 $p = 1$ 时, 对增广矩阵作行初等变换:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_2-4r_1 \\ r_3-6r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

此时方程组无解.

因为

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} p & 1 & 2 \\ 2p & p-1 & 1 \\ 3 & p & p+3 \end{vmatrix} \\ &= p(p-1)(p+3) + 3 + 4p^2 - 6(p-1) - p^2 - 2p(p+3) \\ &= p^3 + 3p^2 - 15p + 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} p+3 & p & 2 \\ p & 2p & 1 \\ 3(p+1) & 3 & p+3 \end{vmatrix} \\ &= 2p(p+3)(p+3) + p(3p+3) + 6p - 4p(3p+3) - 3(p+3) - p^2(p+3) \\ &= p^3 + 12p - 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} p+3 & 1 & p \\ p & p-1 & 2p \\ 3(p+1) & p & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(p+3)(p-1) + p^3 + 6p(p+1) - 3p(p+1)(p-1) - 2p^2(p+3) - 3p \\ &= -4p^3 + 3p^2 + 12p - 9. \end{aligned}$$

所以, 当 $p \neq 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{p^3 + 3p^2 - 15p + 9}{p^2(p-1)}; \quad x_2 = \frac{p^3 + 12p - 9}{p^2(p-1)}; \quad x_3 = \frac{-4p^3 + 3p^2 + 12p - 9}{p^2(p-1)}.$$

当 $p = 0$ 或 $p = 1$ 时, 方程组无解. \square

Exercise 80 (P.149 习题 30). 讨论 p, q 取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = p, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = q. \end{cases}$$

解: 对方程组的增广矩阵作行初等变换:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & q \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \end{array} \right),$$

3.148

可知当 $p \neq 0$ 或 $q \neq 2$ 时, 方程组无解; 当 $p = 0$ 且 $q = 2$ 时, 方程组有无穷多解, 此时对上述矩阵继续作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

得方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3, \end{cases}$ 得方程组的通解为:
$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 + 5c_3 - 2, \\ x_2 = -2c_1 - 2c_2 - 6c_3 + 3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

3.149

Exercise 81 (P.149 习题 30). 讨论 p, q 取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 3, \\ x_2 + px_3 + qx_4 = q - 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (q - 2)x_4 = q + 3. \end{cases}$$

解: 对方程组的增广矩阵作行初等变换:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 1 & 1 & 2 & q-2 & q+3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & q-3 & q-2 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array} \right)$$

(1) 当 $q-1=0$, 即 $q=1$ 时, 方程组无解.

(2) 当 $q \neq 1$ 且 $p \neq 2$ 时, 方程组有唯一解. 此时

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 \div (q-1)]{r_3 \div (p-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{2-p} & \frac{4}{2-p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - \frac{2}{2-p}r_4]{r_1 + 4r_4, r_2 - 3r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6q+6}{q-1} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{4q+5}{1-q} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6q+6}{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{12q-4pq-5p-6}{(1-q)(2-p)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{array} \right),$$

得此时方程组的解为

$$x_1 = \frac{6q+6}{q-1}, \quad x_2 = \frac{12q-4pq-5p-6}{(1-q)(2-p)}, \quad x_3 = \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)}, \quad x_4 = \frac{q+2}{q-1}.$$

(3) 当 $p=2$ 且 $\frac{-2}{q-1} = \frac{-4}{q+2}$ 即 $q=4$ 时, 方程组有无穷多解, 此时

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_4 - 3r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 + 4r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = -2x_3 - 7, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$ 得方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = -2c - 7, \\ x_3 = c, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

(4) 当 $p = 2$ 且 $\frac{-2}{q-1} \neq \frac{-4}{q+2}$ 即 $q \neq 4$ 时, 方程组无解. \square

3.153

Exercise 82 (P.149 习题 31). 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 若任一个 n 维向量都是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 那么 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

证: 由题意可知方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 n , 故

$$n = n - r(\mathbf{A}),$$

得到

$$r(\mathbf{A}) = 0.$$

故 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

另证: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量, 记矩阵 $\mathbf{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. 由题设可得

$$\mathbf{A}\alpha_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

又因为 \mathbf{B} 可逆, 所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

3.154

另证: 由题设, 基本单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 也是其解, 故

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \mathbf{0}.$$

即 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. \square

3.155

Exercise 83 (P.150 习题 34 (1)). 设 \mathbf{A}^* 是 n 阶矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵, 证明:

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } r(\mathbf{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } r(\mathbf{A}) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } r(\mathbf{A}) < n - 1. \end{cases}$$

证: (i) 当 $r(\mathbf{A}) = n$ 时, 有 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 所以 $|\mathbf{A}^*| \neq 0$, 从而 $r(\mathbf{A}^*) = n$.

(ii) 当 $r(\mathbf{A}) = n - 1$ 时, 有 $|\mathbf{A}| = 0$, 且 \mathbf{A} 中至少有一个 $n - 1$ 阶非零子式, 于是 \mathbf{A}^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(\mathbf{A}^*) \geq 1$.

又因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 所以 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}^*) \leq n$, 即

$$r(\mathbf{A}^*) \leq n - r(\mathbf{A}) = n - (n - 1) = 1.$$

综合可得 $r(\mathbf{A}^*) = 1$.

(iii) 当 $r(\mathbf{A}) < n - 1$ 时, \mathbf{A} 中所有 $n - 1$ 阶子式均为 0, 于是 $\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$, 故 $r(\mathbf{A}^*) = 0$. □

3.156

Exercise 84 (P.150 习题 36). 设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵. 证明: 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任何 \mathbf{b} 都有解的充要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

证: 充分性. 当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, 对任意 \mathbf{b} , 由 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 可得

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

充分性得证.

必要性. 取 n 个线性无关的 n 维向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ 的解为 \mathbf{x}_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). 那么

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n).$$

两边取行列式并注意到 $|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n| \neq 0$, 于是 $|\mathbf{A}| \neq 0$. □

3.157

Exercise 85 (P.150 习题 38). 已知 β_1, β_2 是方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个不同解, α_1, α_2 是对应齐次方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一般解是: 【 】

- (A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$;
(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$;

解: $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ 是齐次方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解; $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解. 故排除 (A), (C).

选项 (D) 中, $\beta_1 - \beta_2$ 是齐次方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 但 $\alpha_1, \beta_1 - \beta_2$ 不一定是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系. 故排除.

选项 (B) 正确. □

3.158

Exercise 86 (P.150 习题 39). 已知 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, \mathbf{P} 为 3 阶非零矩阵,

$\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, 则 【 】

- (A) $t = 6$ 时, $r(\mathbf{P}) = 1$. (B) $t = 6$ 时, $r(\mathbf{P}) = 2$.
(C) $t \neq 6$ 时, $r(\mathbf{P}) = 1$. (D) $t \neq 6$ 时, $r(\mathbf{P}) = 2$.

解: 由 $\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ 知

$$r(\mathbf{P}) + r(\mathbf{Q}) \leq 3.$$

- $t = 6$ 时, $r(\mathbf{Q}) = 1, r(\mathbf{P}) \leq 2$;
- $t \neq 6$ 时, $r(\mathbf{Q}) = 2, r(\mathbf{P}) \leq 1$. 又 \mathbf{P} 为非零矩阵, $r(\mathbf{P}) > 0$, 则 $r(\mathbf{P}) = 1$.

故选 (C). □

或者, \mathbf{Q} 的各列是 $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解. $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$, 故 $r(\mathbf{P}) \geq 1$. $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系由 $3 - r(\mathbf{P})$ 个解构成, 并且 $3 - r(\mathbf{P}) \leq 2$.

$t \neq 6$ 时, \mathbf{Q} 的第 1, 3 两列线性无关, 已经构成 $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系. 从而 $3 - r(\mathbf{P}) = 2$, 得 $r(\mathbf{P}) = 1$.

3.159

Exercise 87 (P.150 习题 40). 设

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T,$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ l_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3)$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性无关, 且向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关.

证: 三直线相交于一点的充分必要条件为: 方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

有惟一解.

记方程组 (20) 为

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = -\mathbf{c}. \quad (21)$$

方程组 (21) 有惟一解的充要条件是

$$r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}) = 2. \quad (22)$$

注意到 $r(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}) = r(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, (因为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c})$ 与 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 是列等价的.) 所以 (22) 即为

$$r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 2.$$

即向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性无关, 且向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关. \square

Exercise 88 (P.150 习题 41). 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, $r(\mathbf{A}) = m$ ($m < n$), \mathbf{B} 是 n 阶矩阵, 下列哪个成立?

- (A) \mathbf{A} 中任一 m 阶子式 $\neq 0$; (B) \mathbf{A} 中任意 m 列线性无关;
(C) $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| \neq 0$; (D) 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$;
(E) 若 $r(\mathbf{B}) = n$, 则 $r(\mathbf{AB}) = m$.

解: (A) 错误. 应为: \mathbf{A} 中至少存在一个 m 阶子式 $\neq 0$.

(B) 错误. 应为: \mathbf{A} 中存在某 m 列线性无关.

(C) 错误. 由 $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ (见教材 P.137 例 4), 而 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 故 $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = m < n$, 得 $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$.

(D) 错误. 因 $r(\mathbf{A}) < n$, 故方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解, 从而存在非零矩阵 \mathbf{B} 使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$.

(E) 正确. 见教材 P.128 性质 3. \square

Example 89. 设 $r(\mathbf{A}_{m \times n}) = m < n$, 则下述结论正确的是 **【 】**

- (A) $\mathbf{A}_{m \times n}$ 的任意 m 个列向量必线性无关.
- (B) $\mathbf{A}_{m \times n}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零.
- (C) 若矩阵 \mathbf{B} 满足 $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
- (D) $\mathbf{A}_{m \times n}$ 通过初等行变换必可以化为 $(\mathbf{I}_m, \mathbf{0})$ 的形式.

解: (D) 错. 例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

选 (C). 直观的解释是, \mathbf{BA} 的行向量是 \mathbf{A} 的行向量的线性组合:

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{1m}\mathbf{a}_m \\ b_{21}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{2m}\mathbf{a}_m \\ \vdots \\ b_{t1}\mathbf{a}_1 + b_{t2}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{tm}\mathbf{a}_m \end{pmatrix}.$$

3.163

若 $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$, 则

$$\begin{cases} b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{1m}\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \\ b_{21}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{2m}\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \\ \vdots \\ b_{t1}\mathbf{a}_1 + b_{t2}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{tm}\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \end{cases}$$

而 $r(\mathbf{A}_{m \times n}) = m$, 知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ 线性无关, 则 $b_{ij} = 0$, 所以 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

或者: 由 $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$, 得 $\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$. 下证方程组

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

只有零解.

因 \mathbf{A}^T 是 $n \times m$ 矩阵, 而且 $r(\mathbf{A}^T) = m$, 故方程组 $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

另解: $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$, 则 $r(\mathbf{B}) + r(\mathbf{A}) \leq m$. 而 $r(\mathbf{A}) = m$, 故必有 $r(\mathbf{B}) = 0$, 即 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. □

3.164

Definition 90. 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵,

- 若 \mathbf{A} 的 n 个列向量线性无关, 则称 \mathbf{A} 是列满秩的;
- 若 \mathbf{A} 的 m 个行向量线性无关, 则称 \mathbf{A} 是行满秩的.

由此总结一下矩阵乘法消去律成立的条件:

1. 设 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times l} = \mathbf{0}$, 若 $r(\mathbf{A}) = n$ (即 \mathbf{A} 是列满秩的), 则 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
2. 设 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times l} = \mathbf{0}$, 若 $r(\mathbf{B}) = n$ (即 \mathbf{B} 是行满秩的), 则 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

3.165

Example 91. 设 \mathbf{A} 是 $m \times k$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $k \times m$ 矩阵, 试证:

- (1) 若 $r(\mathbf{A}) = k$, 则 $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$;
- (2) 若 $r(\mathbf{B}) = k$, 则 $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$.


证: (1) 若 $r(\mathbf{A}) = k$, 则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_{m \times m}$, $\mathbf{Q}_{k \times k}$, 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q}.$$

注意到 \mathbf{P} , \mathbf{Q} 可逆, 则

$$r(\mathbf{AB}) = r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{QB}\right) = r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \mathbf{QB} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) = r(\mathbf{I}_k \mathbf{QB}) = r(\mathbf{B}).$$

(2) 同理. □

 这里的 \mathbf{A} 为列满秩矩阵, \mathbf{B} 为行满秩矩阵. 上述结论是矩阵秩的性质 3 的推广 (教材 P.128).

3.166

Exercise 92 (P.151 习题 46). 设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, 若存在正整数 k ($k \geq 2$) 使得 $\mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $\mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量, 证明 $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设

$$l_1 \boldsymbol{\alpha} + l_2 \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \dots + l_k \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

两边同时左乘 \mathbf{A}^{k-1} 得:

$$l_1 \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} + l_2 \mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} + \dots + l_k \mathbf{A}^{2k-2} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

因为 $\mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 所以

$$\mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{k+1} \boldsymbol{\alpha} = \dots = \mathbf{A}^{2k-2} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

代入 (24) 式得:

$$l_1 \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 所以 $l_1 = 0$.

将 $l_1 = 0$ 代入 (23) 式得:

$$l_2 \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \dots + l_k \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (25)$$

两边同时左乘 \mathbf{A}^{k-2} 得:

$$l_2 \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} + l_3 \mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} + \dots + l_k \mathbf{A}^{2k-3} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

注意到

$$\mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{k+1} \boldsymbol{\alpha} = \dots = \mathbf{A}^{2k-2} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0},$$

于是得到 $l_2 = 0$. 类似可得

$$l_3 = l_4 = \dots = l_k = 0.$$

因此结论成立. □

3.168

Example 93 (P.151 习题 47). 设 \mathbf{A} 是 $n \times m$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $n < m$. \mathbf{I} 是 n 阶单位矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, 证明 \mathbf{B} 的列向量线性无关.

证: 因 \mathbf{B} 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $n < m$, 所以

$$r(\mathbf{B}) \leq n.$$

又

$$r(\mathbf{B}) \geq r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{I}) = n,$$

所以 $r(\mathbf{B}) = n$, 得证 \mathbf{B} 的 n 个列向量是线性无关的. \square

另解: 记 $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\mathbf{I} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, 则 $\mathbf{A}\beta_i = \varepsilon_i$. 设

$$k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n = \mathbf{0},$$

两边同时左乘以 \mathbf{A} , 得 $k_1\mathbf{A}\beta_1 + \dots + k_n\mathbf{A}\beta_n = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\varepsilon_1 + \dots + k_n\varepsilon_n = \mathbf{0}.$$

只能有 $k_1 = \dots = k_n = 0$, 故 β_1, \dots, β_n 线性无关. \square

3.169

Exercise 94 (习题 48). 已知 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = r\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中 $\alpha_1 = (1, 2, -3)^T$, $\alpha_2 = (3, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (9, 6, -7)^T$; $\beta_1 = (0, 1, -1)^T$, $\beta_2 = (a, 2, 1)^T$, $\beta_3 = (b, 1, 0)^T$, 且 β_3 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

解: 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3)$ 进行初等行变换:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 + 3r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & b - \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b - 5 \\ 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \end{array} \right), \end{aligned}$$

故 $b = 5$, $r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 2$.

3.170

对 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 进行初等变换 (行变换、列变换均可):

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & a & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - 5r_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & a - 15 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

因 $r\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 2$, 故 $a = 15$. \square

3.171

Exercise 95 (P.152 习题 50). 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 的每行元素之和均为 0, 又 $r(\mathbf{A}) = n - 1$, 求齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的通解.

解: 由 $r(\mathbf{A}) = n - 1$ 知, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 且

$$\xi = (1, 1, \dots, 1)^T$$

是方程组的一个解, 因此所求通解为

$$\boldsymbol{x} = c(1, 1, \dots, 1)^T \quad (c \in \mathbb{R}).$$

3.172

Exercise 96 (P.152 习题 51). 已知下列线性方程组 I, II 为同解线性方程组, 求参数 m, n, t 之值.

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$$

$$\text{II: } \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

3.173

解: 对方程组 I 的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3 \times r_1]{r_3-4 \times r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_2-r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-4 \times r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_{i=2,3}]{r_i \times (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

由此可以得到方程组 I 的一个特解:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = (-2, -4, -5, 0)^T.$$

由于两方程组同解, 所以方程组 I 的解也是方程组 II 的解, 将 $\boldsymbol{\xi}_0$ 代入方程组 II 得:

$$\begin{cases} -2 - 4m + 5 = -5, \\ -4n + 5 = -11, \\ -5 = -t + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2, \\ n = 4, \\ t = 6. \end{cases}$$

3.174

3.175

Exercise 97 (P.152 习题 52). 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (1, \frac{1}{2}, 0)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 8)^T$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha} = (1, \frac{1}{2}, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1, \frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^2 &= (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T = 2\mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^4 &= 8\mathbf{A}. \end{aligned}$$

于是方程组为: $16\mathbf{A}\mathbf{x} = 8\mathbf{A}\mathbf{x} + 16\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}$, 即 $(8\mathbf{A} - 16\mathbf{I})\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}$. 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

故

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = 2x_3 + 1, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

于是方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Exercise 98 (P.152 习题 53). 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|\mathbf{A}| \neq 0$, \mathbf{A} 的前 $n-1$ 列构成的 $n \times (n-1)$ 矩阵记为 $\mathbf{A}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

$$r(\mathbf{A}_1) = n-1, \quad r(\mathbf{A}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) = r(\mathbf{A}) = n,$$

得 $r(\mathbf{A}_1) \neq r(\mathbf{A}_1, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 所以无解. \square

另解: 由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性表示, 从而

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \boldsymbol{\alpha}_n$$

无解, 即 $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_n$ 无解. \square

Exercise 99 (P.152 习题 56). 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 皆为 n 阶矩阵, 证明:

$$\begin{aligned} (1) \quad \left| \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array} \right| &= |\mathbf{I} - \mathbf{AB}|; & (2) \quad |\mathbf{I} - \mathbf{BA}| &= |\mathbf{I} - \mathbf{AB}|; \\ (3) \quad \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB}) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{BA}) \quad (\lambda \text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

解: (1) $\left| \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array} \right| \xrightarrow{r_2 - \mathbf{A} \times r_1} \left| \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{AB} \end{array} \right| = |\mathbf{I}| |\mathbf{I} - \mathbf{AB}| = |\mathbf{I} - \mathbf{AB}|.$

$$(2) |I - AB| = \left| \begin{array}{cc|c} I & B & \\ \hline A & I & \\ \hline \end{array} \right| \xrightarrow{c_1 - c_2 \times A} \left| \begin{array}{cc|c} I - BA & B & \\ \hline 0 & I & \\ \hline \end{array} \right| = |I - BA|.$$

(3) 因为

$$\left| \begin{array}{cc|c} \lambda I & B & \\ \hline A & I & \\ \hline \end{array} \right| \xrightarrow{c_1 - c_2 \times A} \left| \begin{array}{cc|c} \lambda I - BA & B & \\ \hline 0 & I & \\ \hline \end{array} \right| = \det(\lambda I - BA);$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} \lambda I & B & \\ \hline A & I & \\ \hline \end{array} \right| \xrightarrow{r_1 - B \times r_2} \left| \begin{array}{cc|c} \lambda I - AB & 0 & \\ \hline A & I & \\ \hline \end{array} \right| = \det(\lambda I - AB),$$

所以 $\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$. \square

更一般的结论

若 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 矩阵, 则有下述结论成立:

$$(1) \left| \begin{array}{cc} I_m & A \\ B & I_n \end{array} \right| = |I_m - AB| = |I_n - BA|.$$

$$(2) \lambda^n |I_m - AB| = \lambda^m |I_n - BA|.$$

证: (1) 因为

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n - BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & A \\ O & I_n \end{pmatrix},$$

上两式两端取行列式, 即得

$$\left| \begin{array}{cc} I_m & A \\ B & I_n \end{array} \right| = |I_m - AB| = |I_n - BA|.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} |\lambda I_m - AB| &= \left| \lambda \left(I_m - \frac{1}{\lambda} AB \right) \right| = \lambda^m \left| I_m - \frac{1}{\lambda} AB \right| \\ &= \lambda^m \left| I_n - \frac{1}{\lambda} BA \right| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|. \end{aligned}$$

其中 $|I_m - \frac{1}{\lambda} AB| = |I_m - A(\frac{1}{\lambda} B)| = |I_n - \frac{1}{\lambda} BA|$. 故

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|.$$

另外, 易知有下列形式成立:

$$(1) |I_m + AB| = |I_n + BA|.$$

$$(2) \lambda^n |\lambda I_m + AB| = \lambda^m |\lambda I_n + BA|.$$

使用上述结论可以降阶计算某些行列式. 例如, 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}.$$

解:

$$D_n = \left| I_n + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1, \cdots, y_n) \right| = \left| I_1 + (y_1, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right|$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

又如, 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: 这是第一章的经典例题. 使用 $|\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{BA}|$ 得到第 5 个解法.

$$\begin{aligned} D_n &= \left| (x-a)\mathbf{I}_n + \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix} \right| = \left| (x-a)\mathbf{I}_n + \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (1, \cdots, 1) \right| \\ &= (x-a)^n \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{x-a} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (1, \cdots, 1) \right| = (x-a)^n \left| \mathbf{I}_1 + \frac{1}{x-a} (1, \cdots, 1) \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \right| \\ &= (x-a)^n \left(1 + \frac{na}{x-a} \right) = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Exercise 100 (P.152 习题 57). 证明: 若 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, $r(\mathbf{A}) = r$, 则存在 $m \times r$ 矩阵 \mathbf{B} , $r \times n$ 矩阵 \mathbf{C} , 且 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{C}) = r$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

证: 因为 $r(\mathbf{A}) = r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 \mathbf{P} 和 n 阶可逆矩阵 \mathbf{Q} 使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

于是 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Q}^{-1}$. 将矩阵 \mathbf{P}^{-1} 和 \mathbf{Q}^{-1} 分块为 $\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{B}_{m \times r}, \mathbf{M}_{m \times (m-r)})$, $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r \times n} \\ \mathbf{N}_{(n-r) \times n} \end{pmatrix}$. 因为 \mathbf{B} 中的 r 列线性无关, \mathbf{C} 中的 r 行线性无关, 又 $r \leq m$, $r \leq n$, 所以 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{C}) = r$, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{B}_{m \times r}, \mathbf{M}_{m \times (m-r)}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r \times n} \\ \mathbf{N}_{(n-r) \times n} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{B}_{m \times r}, \mathbf{0}_{m \times (m-r)}) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r \times n} \\ \mathbf{N}_{(n-r) \times n} \end{pmatrix} = \mathbf{BC}. \end{aligned}$$

Exercise 101 (P.153 习题 59). 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (其中 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 α_i ($1 < i \leq r$) 使得 α_i 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然. 必要性. 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\alpha_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}
&k_{21}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 = \mathbf{0}, \\
&k_{31}\alpha_1 + k_{32}\alpha_2 + k_{33}\alpha_3 = \mathbf{0}, \\
&\dots\dots\dots \\
&k_{r1}\alpha_1 + k_{r2}\alpha_2 + \dots + k_{rr}\alpha_r = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 所以存在一组不全为 0 的数使得某一个式子成立. 设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为 0 的数, 因为 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$. 因为 $k_{ii} \neq 0$, 所以 α_i 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示. 又因为系数还满足

3.186

$$k_{11} = k_{21} = k_{22} = \dots = k_{i,i-1} = 0$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性无关, 所以表示法唯一. \square

3.187

Exercise 102 (P.153 习题 60). 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是

$$\alpha_i \neq \sum_{j=1}^{i-1} k_j \alpha_j \quad (i = 2, 3, \dots, s).$$

证: 必要性. 用反证法, 若存在某一个 i_0 , 使得

$$\alpha_{i_0} = \sum_{j=1}^{i_0-1} k_j \alpha_j,$$

则一定有 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 矛盾.

充分性. 用反证法, 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 由习题 59 可知存在一个 α_{i_0} ($1 < i_0 \leq r$) 使得 α_{i_0} 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_0-1}$ 线性表示, 矛盾. \square

3.188

Exercise 103 (P.153 习题 61). 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 如果在向量组的前面加入一个向量 β , 证明: 在向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中至多有一个向量 α_i ($1 \leq i \leq r$) 可经其前面的 i 个向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示. 并在 \mathbb{R}^3 中做几何解释.

证: (1) 如果 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 那么任何 α_i ($1 \leq i \leq r$) 都不能经其前面的 i 个向量线性表示;

(2) 如果 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 但 $\beta = \mathbf{0}$, 那么任何 α_i ($1 \leq i \leq r$) 都不能经其前面的 i 个向量线性表示;

(3) 如果 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 且 $\beta \neq \mathbf{0}$. 从前往后考察, 如果 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性无关, 而 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ 线性相关, 此时 α_i 可由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示. 下证至多有一个 α_i ($1 \leq i \leq r$) 可由其前面的 i 个向量线性表示.

3.189

用反证法. 设 α_i 与 α_j ($j > i$) 均可由前面的 i 个与 j 个向量线性表示, 即

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= k_0\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1}, \\
\alpha_j &= l_0\beta + l_1\alpha_1 + \dots + l_{i-1}\alpha_{i-1} + l_i\alpha_i + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1},
\end{aligned}$$

其中 $k_0 \neq 0, l_0 \neq 0$. 由上面的两个式子得到:

$$\beta = -\frac{k_1}{k_0}\alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_0}\alpha_{i-1} + \frac{1}{k_0}\alpha_i,$$

$$\beta = -\frac{l_1}{l_0}\alpha_1 - \cdots - \frac{l_{i-1}}{l_0}\alpha_{i-1} - \frac{l_i}{l_0}\alpha_i - \cdots - \frac{l_{j-1}}{l_0}\alpha_{j-1} + \frac{1}{l_0}\alpha_j.$$

两式相减得到: $(\frac{l_1}{l_0} - \frac{k_1}{k_0})\alpha_1 + \cdots + (\frac{l_{i-1}}{l_0} - \frac{k_{i-1}}{k_0})\alpha_{i-1} + (\frac{l_i}{l_0} + \frac{1}{k_0})\alpha_i + \frac{l_{i+1}}{l_0}\alpha_{i+1} + \cdots + \frac{l_{j-1}}{l_0}\alpha_{j-1} - \frac{1}{l_0}\alpha_j = \mathbf{0}$.

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ 线性无关, 则 $j = i$, 且 $k_0 = l_0, k_1 = l_1, \cdots, k_{i-1} = l_{i-1}$. 即至多只有一个 α_i 可由其前面的 i 个向量线性表示.

几何解释: 设 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$,

当 $\beta = (a, b, 0)$ 时, $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 共面, 此时 α_1 不能由 β 表示, α_2 可由 β, α_1 表示: $\alpha_2 = \frac{1}{b}\beta - \frac{a}{b}\alpha_1$, α_3 不能由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 表示.

当 $\beta = (0, b, c)$ 时, $\beta, \alpha_2, \alpha_3$ 共面, 此时 α_1 不能由 β 表示, α_2 也不能由 β, α_1 表示, α_3 能由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 表示: $\alpha_3 = \frac{1}{c}\beta + 0\alpha_1 - \frac{b}{c}\alpha_2$.

当 $\beta = (a, 0, c)$ 时, $\beta, \alpha_1, \alpha_3$ 共面, 此时 α_1 不能由 β 表示, α_2 也不能由 β, α_1 表示, α_3 能由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 表示: $\alpha_3 = \frac{1}{c}\beta - \frac{a}{c}\alpha_1 + 0\alpha_2$.

当 $\beta = (a, b, c)$ 时, $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 任意三个不共面, 此时 α_1 不能由 β 表示, α_2 也不能由 β, α_1 表示, α_3 能由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 表示: $\alpha_3 = \frac{1}{c}\beta - \frac{a}{c}\alpha_1 - \frac{b}{c}\alpha_2$.

3.190

3.191

Exercise 104 (P.153 习题 62). 证明: 在 n 维向量空间 \mathbb{R}^n 中, 若向量 α 可经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, 则表示法唯一的充要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

证: 充分性. 由教材 116 页定理 3.3, 知表示法唯一.

必要性. 用反证法: 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 k_1, k_2, \cdots, k_s 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

由条件又设

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s,$$

于是得到

$$\alpha = \alpha + \mathbf{0} = (k_1 + \lambda_1)\alpha_1 + (k_2 + \lambda_2)\alpha_2 + \cdots + (k_s + \lambda_s)\alpha_s.$$

即向量 α 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示的方法有两种, 矛盾. \square

3.192

Exercise 105 (P.153 习题 63). 设 A 是 n 阶矩阵, $r(A) = 1$, 证明:

$$(1) A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n); \quad (2) A^2 = kA.$$

证: 因为 $r(A) = 1$, 所以 A 中任意两个列向量线性相关, 即任意两列成比例. 故可设

$$A = (b_1\alpha, b_2\alpha, \cdots, b_n\alpha) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

由 (1) 可知:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \left[(b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right] (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \mathbf{A} = k \mathbf{A}. \end{aligned}$$

其中 $k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. □

Exercise 106 (P.154 习题 66). 设 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 又 \mathbf{B} 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明: $\mathbf{B}\mathbf{A}$ 的行向量组也是 $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得:

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^T = \mathbf{0} \implies \mathbf{C}\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \implies \mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{A})^T = \mathbf{0},$$

即 $(\mathbf{B}\mathbf{A})^T$ 的 m 个列向量都是 $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 亦即 $\mathbf{B}\mathbf{A}$ 的 m 个行向量都是 $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解. 又因为矩阵 \mathbf{B} 可逆, 所以

$$r(\mathbf{B}\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = m = \mathbf{B}\mathbf{A} \text{ 的行数} = \text{基础解系中解向量的个数}.$$

故结论成立. □

Exercise 107 (P.154 习题 67). 证明: 若 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵 ($n > 1$), 且 $|\mathbf{A}| = 0$, 则 $|\mathbf{A}|$ 中任意两行 (列) 对应元素的代数余子式成比例.

证: 即要证伴随矩阵 \mathbf{A}^* 中任意两行 (列) 成比例.

由 $|\mathbf{A}| = 0$, 即 $r(\mathbf{A}) < n$, 得

$$r(\mathbf{A}^*) = 0 \text{ 或 } 1.$$

若 $r(\mathbf{A}^*) = 0$, 则 $\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$, 结论成立.

若 $r(\mathbf{A}^*) = 1$, 则 \mathbf{A}^* 中任意两行 (列) 线性相关, 即成比例. 结论成立. □

Exercise 108 (P.154 习题 69). 若 \mathbf{A} 为一个 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 证明

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = n.$$

证: 一方面

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \geq r(\mathbf{A} + \mathbf{I} - \mathbf{A}) = r(\mathbf{I}) = n,$$

另一方面, 由 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 得 $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$, 故

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \leq n.$$

综合可得 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = n$. □

3.197

Exercise 109 (P.154 习题 70). 若 \mathbf{A} 为一个 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, 证明

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = n.$$

证: 一方面,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) &= r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + r(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &\geq r(\mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{A}) = r(2\mathbf{I}) = n, \end{aligned}$$

另一方面, 由 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 得 $(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$, 从而

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \leq n.$$

综合可得 $r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = n$. □

3.198

Exercise 110 (P.154 习题 71). 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 皆为 n 阶方阵, 证明

$$r(\mathbf{AB}) \geq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n.$$

证: 由习题 15 的结论可知:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) &= r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \leq r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{AB} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{AB} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= r(\mathbf{I}) + r(-\mathbf{AB}) = n + r(\mathbf{AB}), \end{aligned}$$

于是 $r(\mathbf{AB}) \geq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n$. □

3.199

Exercise 111 (2014 考研试题 11 分). 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, \mathbf{I} 为 3 阶

单位矩阵.

(I) 求方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ 的所有矩阵 \mathbf{B} .

解: (I) 对矩阵 \mathbf{A} 施以初等行变换

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(II) 对矩阵 (A, I) 施以初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right).$$

记 $I = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 则

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \text{ 的通解为 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\boldsymbol{\alpha}, \quad k_1 \text{ 为任意常数};$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 \text{ 的通解为 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\boldsymbol{\alpha}, \quad k_2 \text{ 为任意常数};$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3 \text{ 的通解为 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\boldsymbol{\alpha}, \quad k_3 \text{ 为任意常数}.$$

于是所求矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\boldsymbol{\alpha}, k_2\boldsymbol{\alpha}, k_3\boldsymbol{\alpha}),$$

k_1, k_2, k_3 为任意常数.

Example 112. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解: 记该方程组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 由于矩阵 A 的秩为 3, 方程组有 4 个未知量,

$$n - r = 4 - 3 = 1,$$

故其对应的齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系含有一个向量.

由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 均为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解, 知 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3$ 为对应的齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, $(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3)$ 也是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解. 又 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系含有一个向量, 所以可以取

$$(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3) = 2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 基础解系. 故方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为:

$$\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Example 113. 设有向量组 $A: \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$

及向量 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, 问 α, β 为何值时

- (1) 向量 \mathbf{b} 不能由向量组 A 线性表示;
- (2) 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式惟一;
- (3) 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解: (此题其实是重要题型“带参量的线性方程组”的另一种出现方式.)

设 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$, 即

$$\begin{cases} \alpha x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta, \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases} \quad (26)$$

往下讨论方程组 (26) 的解即可. 记矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, 由

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_2} \begin{vmatrix} \alpha + 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -(\alpha + 4),$$

所以, 当 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 即 $\alpha \neq -4$ 时, 向量 \mathbf{b} 能有由量组 A 线性表示, 且表示式惟一.

当 $\alpha = -4$ 时,

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 5r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 + 2\beta \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & -1 - 5\beta \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & -1 & -1-5\beta \end{array} \right) \xrightarrow{(r_3+r_2) \div (-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right),$$

所以, 当 $\alpha = -4$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 方程组 (26) 无解, 向量 \mathbf{b} 不能由向量组 A 线性表示.

当 $\alpha = -4$ 且 $\beta = 0$ 时, 方程组 (26) 有解. 由

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

得方程组 (26) 的同解方程组及通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 - 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = -2c - 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

即, 当 $\alpha = -4$ 且 $\beta = 0$ 时, 向量 \mathbf{b} 能由量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 其一般表示式为

$$\mathbf{b} = c\mathbf{a}_1 - (2c + 1)\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Example 114. 设矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, 其中 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关, $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$. 向量 $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$, 求方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解.

解: 方法一. 记方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 为

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}.$$

代入 $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, 整理得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\mathbf{a}_2 + (-x_1 + x_3)\mathbf{a}_3 + (x_4 - 1)\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关, 故只能有

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

方程组 (27) 等价于

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

得方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

方法二. 由题设知 $r(\mathbf{A}) = 3$, $n - r = 4 - 3 = 1$, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系中只包含一个向量. 由 $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, 即

$$1\mathbf{a}_1 + (-2)\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 = \mathbf{0},$$

故可取 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $(1, -2, 1, 0)^T$.

再由

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

知 $(1, 1, 1, 1)^T$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个特解. 所以 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

方法三. 记矩阵 $\mathbf{P} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. 则

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{PB},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}.$$

则方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 为

$$\mathbf{PBx} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}, \quad \text{即} \quad \mathbf{P}(\mathbf{Bx} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}.$$

注意 \mathbf{P} 是 4×3 矩阵, 且 $r(\mathbf{P}) = 3$, 则方程组 $\mathbf{Py} = \mathbf{0}$ 只有零解, 所以

$$\mathbf{Bx} - \boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{0}.$$

解方程组 $Bx = \beta$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

3.212

Example 115. 设向量组

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求 a, b .

解: 依次记这 4 个向量为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, 并记此向量组为 A . 易见 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关 (因这两个向量对应坐标不成比例), 而已知向量组 A 的秩为 2, 所以 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 是向量组 A 的一个极大无关组. 则 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 可以由向量组 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性表示.

设

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $x = 0, y = 1$, 从而 $a = 2$.

用同样的方法可以计算得 $b = 5$. □

3.213

Example 116. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

证: 向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示, 则

$$r(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \leq r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n).$$

而

$$r(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = n, \text{ 且 } r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \leq n,$$

所以

$$r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = n.$$

得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

另证. 注意 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 当然是可以由单位坐标向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性表示的, 再加上已知条件, 知两向量组等价. 所以

$$r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = r(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = n,$$

得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关. \square

Example 117. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证: (充分性) 任一 n 维向量都可由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示, 则 n 维单位向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示. 由上一题得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

(必要性) 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关. 任给 n 维向量 \mathbf{b} , 则向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ 线性相关 ($n+1$ 个 n 维向量必线性相关). 则向量 \mathbf{b} 必能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性表示 (且表示式是惟一的).

必要性的另一个说法: 若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关, 注意到这是一组 n 维向量, 则它们是向量空间 \mathbb{R}^n 的一组基, 所以任一 n 维向量都可由它们线性表示. \square

Example 118. 设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, 且 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, 证明存在某个向量 \mathbf{a}_k ($2 \leq k \leq m$), 使 \mathbf{a}_k 能由 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$ 线性表示.

证: 假设不存在这样的 \mathbf{a}_k . 则 \mathbf{a}_2 不能由 \mathbf{a}_1 线性表示, 从而向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关.

\mathbf{a}_3 不能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性表示, 又向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关, 所以向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关.

依次类推, 可以得到向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性无关. 这与题设矛盾. 假设不成立. 得证. \square

Example 119. 已知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$, 试证向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 线性无关.

证: 方法一. 由已知得

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

记作 $\mathbf{B} = \mathbf{AK}$. 设

$$x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_3 \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}, \quad (28)$$

即 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$. 代入 $\mathbf{B} = \mathbf{AK}$, 得

$$\mathbf{A}(\mathbf{Kx}) = \mathbf{0}. \quad (29)$$

因 \mathbf{A} 的列向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 故要使 (29) 式成立, 只能有

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

又

$$|\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

故方程组 $\mathbf{Kx} = \mathbf{0}$ 只有零解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 所以矩阵 \mathbf{B} 的列向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 线性无关.

方法二. 由已知得

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

记作 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{K}$. 因 $|\mathbf{K}| = 2 \neq 0$, 知 \mathbf{K} 可逆, 由矩阵秩的性质 3 (教材 P.128) 知

$$r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}).$$

因 \mathbf{A} 的列向量组线性无关, 知 $r(\mathbf{A}) = 3$, 从而 $r(\mathbf{B}) = 3$, 得证矩阵 \mathbf{B} 的列向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 线性无关. \square

3.218

Example 120. 设向量组 $B: \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ 能由向量组 $A: \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表示为

$$(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)\mathbf{K},$$

其中 \mathbf{K} 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 \mathbf{K} 的秩 $r(\mathbf{K}) = r$.

证: (必要性) 设 B 组线性无关.

记 $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$, 则有

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{K}. \quad (31)$$

由秩的性质知

$$r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}\mathbf{K}) \leq r(\mathbf{K}). \quad (32)$$

而由 B 组线性无关知 $r(\mathbf{B}) = r$, 故 $r(\mathbf{K}) \geq r$.

又 \mathbf{K} 为 $r \times s$ 阶矩阵, 则 $r(\mathbf{K}) \leq r$.

综上知 $r(\mathbf{K}) = r$.

3.219

(充分性) 若 $r(\mathbf{K}) = r$. 令

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_r\mathbf{b}_r = \mathbf{0}. \quad (33)$$

下证方程 (33) 只有零解. 为方便记方程 (33) 为

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (34)$$

代入 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{K}$ 则有

$$\mathbf{A}(\mathbf{K}\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (35)$$

由向量组 $A: \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关, 所以方程 (35) 只有零解:

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

又 $r(\mathbf{K}) = r =$ 未知量个数, 所以方程 (36) 只有零解:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

所以 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性无关. \square

3.220

Example 121. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n, \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n, \\ \quad \dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

证: 由题设知向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

下面只需证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示.

由题设得

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = (n-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

所以

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)/(n-1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

得

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)/(n-1) - \beta_1, \\ \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)/(n-1) - \beta_2, \\ \quad \dots\dots\dots \\ \alpha_n = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)/(n-1) - \beta_n. \end{cases}$$

得证向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示.

综上, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

另一个思路: 先说明系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

再得两向量组等价. □

Example 122. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x 满足 $A^3x = 3Ax - A^2x$, 且向量组 x, Ax, A^2x 线性无关,

(1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B , 使 $AP = PB$; (2) 求 $|A|$.

解: (1) 由 $P = (x, Ax, A^2x)$, 有

$$\begin{aligned} AP &= A(x, Ax, A^2x) \\ &= (Ax, A^2x, A^3x) \\ &= (x, Ax, A^2x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{由 } A^3x = 3Ax - A^2x) \end{aligned}$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到矩阵 P 是 3 阶方阵, 又向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 所以矩阵 P 可逆.

由 $AP = PB$, 得

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $A = PBP^{-1}$, 两边取行列式得,

$$|A| = |B| = 0.$$

Example 123. 设 $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r$, 且向量组 a_1, a_2, \dots, a_r 线性无关, 证明向量组 b_1, b_2, \dots, b_r 线性无关.

证: 设

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_r b_r = \mathbf{0}, \quad (37)$$

即

$$(k_1 + \dots + k_r)a_1 + (k_2 + \dots + k_r)a_2 + \dots + (k_i + \dots + k_r)a_i + \dots + k_r a_r = \mathbf{0}. \quad (38)$$

因向量组 a_1, a_2, \dots, a_r 线性无关, 故只能有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \dots + k_r = 0, \\ k_2 + \dots + k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ k_r = 0. \end{cases} \quad (39)$$

通过回代可直接解得 $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$. 所以 b_1, b_2, \dots, b_r 线性无关.

证二. 因为

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_r) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

而矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 所以

$$r(b_1, b_2, \dots, b_r) = r(a_1, a_2, \dots, a_r) = r.$$

得证 b_1, b_2, \dots, b_r 线性无关.

证三. 由题设知向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 可由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 线性表示;

又 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_r = \mathbf{b}_r - \mathbf{b}_{r-1}$, 知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 可由向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性表示.

故向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 与向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 等价. 又 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 线性无关, 知

$$r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r) = r.$$

得证 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

3.227

证四. 记矩阵 $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r)$, 则

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_r) \\ \xrightarrow[j=r, \dots, 2, 1]{c_j - c_{j-1}} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r),$$

从而,

$$r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r) = r,$$

知 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ 线性无关. □

3.228

7 总结与复习

7.1 本章要点

(一) 向量的线性表示.

有关向量的线性表示, 下面的说法是等价的:

向量 \mathbf{b} 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

\iff 线性方程组 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$ 有解.

$\iff r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$.

上述结论的朴素理解: $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$, 意味着往向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中添加向量 \mathbf{b} , 并没有使得向量组的秩增加, 其根本原因在于向量 \mathbf{b} 能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

其几何本质是: 设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 的秩为 r , 则它们构成 \mathbb{R}^n 中的一个 r 维子空间. 向量 \mathbf{b} 属于这个 r 维子空间, 等价于 \mathbf{b} 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

3.229

进而, $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s)$, 也可理解为往向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中添加向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$, 并没有使得向量组的秩增加. 所以, 向量组 $B: \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$ 能由向量组 $A: \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是

$$r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s).$$

当然, 其几何本质仍然是: 向量组 B 处在向量组 A 所张成的 r 维子空间内, 这里 $r = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$.

3.230

(二) 线性相关与线性无关.

对于**线性相关**, 下面的说法是等价的:

向量组 $A: \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \geq 2$) 线性相关.

\iff 向量组 A 中至少存在一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

\iff 线性方程组 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ 有非零解.

$\iff \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 的秩小于向量的个数 m , 即 $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) < m$.

对于**线性无关**, 下面的说法是等价的:

向量组 $A: \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \geq 2$) 线性无关.

\iff 线性方程组 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ 只有零解.

$\iff r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = m$.

3.231

☞ 从上述说法要得到的理解是:

(1) 注意向量组、方程组、矩阵问题的相互转换;

(2) 得到一个朴素的认识: $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) < m$ 的根本原因在于, 列向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中有多余的向量, 或说存在某向量可以被其他的向量线性表示, 当然整个向量组是线性相关的.

(3) 其**几何本质**是: 向量组线性相关, 说明其中至少有一个向量, 处在余下向量所张成的子空间内.

3.232

(三) 矩阵的秩

矩阵的秩, 是其行向量 (或者列向量) 所张成的子空间的维数.

1. 初等变换不改变矩阵的秩. 或者用下面的两种方式表述:

(i) 若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, 则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. (但 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ 不能得 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, 除非两者是同型矩阵.)

(ii) 若 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 可逆, 则 $r(\mathbf{PAQ}) = r(\mathbf{A})$.

2. 矩阵和、差、积的秩.

(i) $r(\mathbf{A}) - r(\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

(ii) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n \leq r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$. 其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 $s \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵.

3.233

(四) 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 解的判别

这里 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 即未知量的个数是 n , 方程的个数是 m . $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 解的情形只有 3 种: 无解, 有唯一解, 有无穷多解. 即

$$\begin{cases} \text{无解} \\ \text{有解} \begin{cases} \text{有唯一解;} \\ \text{无穷多解.} \end{cases} \end{cases}$$

$r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$ 是否成立, 是判断有解、无解的依据; $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = n$ 是否成立, 是判断有唯一解、有无穷多解的依据. 即

$$Ax = b \begin{cases} \text{无解} \iff r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq r(\mathbf{A}) \\ \text{有解} \iff r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) \begin{cases} \text{有唯一解} \iff r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = n; \\ \text{无穷多解} \iff r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) < n. \end{cases} \end{cases}$$


a. 用高斯消元法解释

记 $\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$. 注意到 \mathbf{B} 比 \mathbf{A} 只多 1 列, 故要么 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + 1$, 要么 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$.

若 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + 1$, 则说明高斯消元法完成后, \mathbf{B} 的非零行比 \mathbf{A} 的非零行多 1 行, 多出来的那一行是矛盾方程 $0 = 1$, 导致方程组无解.

$r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) < n$ 时, 说明高斯消元法最后余下的方程的个数少于未知量的个数 n , 故有自由未知量出现, 则方程组有无穷多解, 并且自由未知量的个数为 $n - r(\mathbf{A})$. 故

- (1) 若 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + 1$, 则说明出现了矛盾方程, 导致方程组无解.
- (2) 若 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$, 则没有矛盾方程, 方程组有解.
 - (i) 当 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) < n$ 时, 说明出现了自由未知量, 导致方程组有无穷多解;
 - (ii) 而 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) = n$ 时, 则没有出现自由未知量, 所以方程组有唯一解.

 是否出现**矛盾方程**是方程组有解与否的关键; 是否出现**自由未知量**又是区分有无穷多解和有唯一解的关键.

b. 从向量的角度去解释

记 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$.

- $Ax = b$ 有解
- \iff 向量 \mathbf{b} 能由向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.
- $\iff r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) = r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$.
- $\iff r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$.

c. 从几何的角度去解释

记 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$.

- $Ax = b$ 有解
- \iff 向量 \mathbf{b} 属于向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 所张成的子空间.
- \iff 向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 所张成的子空间, 与向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ 所张成的子空间, 是同一个子空间.
- $\iff r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$.

(五) 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解的判别

这里 A 为 $m \times n$ 矩阵, 即未知量的个数是 n , 方程的个数是 m .

齐次方程组 $Ax = 0$ 是天然有解的, 它至少有一个解: 零解. 所以对齐次方程组 $Ax = 0$, 我们关心的不在于它有没有解, 而在于它是否有非零解.

下面的结论要非常的清楚:

n 元齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充要条件是 $r(A) = n$.

n 元齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $r(A) < n$.

齐次方程解的几何看法

由 $Ax = 0$ 知向量 x 与矩阵 A 的行向量都是垂直的; 注意到解集构成一个 $n - r(A)$ 维子空间 V_0 , 而矩阵 A 的行向量构成一个 $r(A)$ 维子空间 V , 故这两个空间是相互垂直的. 几何上看, 求解 $Ax = 0$, 就是要寻找与 V 垂直的那个空间 V_0 .

3.239

(六) “ $n - r$ ” 的含义.

定理 3.14 是说: 对 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$, 设 $r(A) = r$, 则方程组 $Ax = 0$ 的基础解系包含 $n - r$ 个向量.

r 是 A 的秩, 也是 A 的行阶梯型矩阵的非零行的行数, 是非自由未知量的个数. (非自由未知量一般取自非零行的第一个非零元所对应的未知量, 一个非零行只能确定一个非自由未知量.)

n 是未知量的总数, 所以 $n - r$ 是自由未知量的个数. 有多少个自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量.

3.240

(七) 研究极大无关组的意义.

极大无关组和原向量组是等价的, 是原向量组的简约, 更是原向量组的“全权代表”.

极大无关组从理论上弄清了: 用消元法解线性方程组时, 为什么最后会剩余稳定数量的方程. 事实上那些剩下的方程就是原方程组的“极大无关组”, 和原方程组是等价的, 是同解的.

线性相关、线性表示的概念也可以解释用消元法解线性方程组的相关问题: 方程组是“线性相关”的, 说明有多余的方程; 能被其他的方程“线性表示”的方程就是多余的. (“多余”是相对的, 方程的去、留不是绝对的, 因极大无关组一般不唯一.)

极大无关组也使线性方程组在解的表示上, 得到了简洁、完备的表达.

从几何本质上看, 极大无关组还充当了坐标系的功能. 极大无关组所包含向量的个数 = 原向量组所张成子空间的维数.

3.241

(八) 矩阵等价与向量组等价的区别与联系.

设有两个 n 维向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$, 和 $B: b_1, b_2, \dots, b_m$. 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, 矩阵 $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. 则

(1) 向量组等价, 可得矩阵等价; (注意这里所设的两向量组中向量的个数相同, 否则两矩阵的列数不同, 会导致矩阵不是同型矩阵, 就不能得到矩阵等价.)

(2) 矩阵等价, 不能得到向量组等价.

例如, 设 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 由 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 2$, 知 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. 但向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 与向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 不是等价的.

两向量组等价的充要条件是

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

而不是 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. 其中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是由向量组 A 和 B 所构成的矩阵.

(九) 新添矩阵可逆的等价说法

n 阶矩阵 \mathbf{A} 可逆, 新添下列等价说法:

- (1) \mathbf{A} 是满秩矩阵; 或 $r(\mathbf{A}) = n$. (不可逆矩阵又称为降秩矩阵.)
- (2) \mathbf{A} 的标准形是 \mathbf{I} ; 或 $\mathbf{A} \cong \mathbf{I}$.
- (3) \mathbf{A} 可以表达为有限个初等矩阵的乘积.
- (4) 齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.
- (5) 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解.

注意, 第一章的克拉默法则只告诉了我们矩阵 \mathbf{A} 可逆是方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解的充分条件.

(十) 要避免的错误

求矩阵秩时, 行变换和列变换可以随意进行, 行变、列变、两者交叉进行, 都可以 (因为“初等变换不改变矩阵的秩”).

而解方程和求逆矩阵时只能进行一种变换:

(1) 对增广矩阵 $\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 进行初等变换求解方程时, 只有行变换, 不能有列变换; (因该过程本质上是消元法, 当然只能方程与方程之间进行运算, 在对应的增广矩阵中就体现为初等行变换.)

(2) 用矩阵初等变换 $(\mathbf{A}, \mathbf{I}) \cong (\mathbf{I}, \mathbf{A}^{-1})$ 求逆矩阵时, 只有行变换, 不能有列变换. 其他的情形类似.

7.2 题型举例

7.2.1 向量组的线性相关性

Example 124. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是

【 】

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不为零向量.
- (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.
- (C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性无关.

解: 选 (C).

“向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充要条件是向量组中至少存在一个向量能由其余 $s-1$ 个向量线性表示”, 这句话的等价叙述是, “向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是向量组中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示”.

(B) 只能说明向量两两线性无关, 得不到整个向量组线性无关. (A), (B), (D) 都只是必要条件. \square

3.246

Example 125. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 均为 n 维列向量, 下列结论正确的是 **【 】**

- (A) 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.
- (B) 若对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \neq \mathbf{0}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.
- (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$.
- (D) 若 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = \mathbf{0}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

解: 选 (B). \square

3.247

Example 126 (1994 数一). 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组**【 】**

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关.
- (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
- (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
- (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

解: (A) 错: $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = \mathbf{0}$;
 (B) 错: $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = \mathbf{0}$;
 (D) 错: $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = \mathbf{0}$;
 选 (C): 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

且右侧矩阵可逆. \square

3.248

Example 127 (1994 数四). 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = \mathbf{0}$, 则 A 和 B 的秩 **【 】**

- (A) 必有一个等于零. (B) 都小于 n .
- (C) 一个小于 n , 一个等于 n . (D) 都等于 n .

解: 因 A, B 都是非零矩阵, 故 $r(A) \geq 1, r(B) \geq 1$. 故 (A) 错.

若其中一个秩为 n , 即该矩阵可逆, 则另一个矩阵只能是零矩阵. 这与“ A, B 都是非零矩阵”矛盾. 故 (C), (D) 错.

由题设知方程 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解, 所以 $r(A) < n$. 同理, 由 $B^T x = \mathbf{0}$ 有非零解, 知 $r(B) < n$. 选 (B).

另解: 由教材 P.137 例 3: 若 $A_{m \times n} B_{n \times s} = \mathbf{0}$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$. 又 $r(A) \geq 1$, $r(B) \geq 1$, 故 $r(A), r(B)$ 都小于 n . \square

Example 128. 设 A, B 为满足 $AB = \mathbf{0}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 **【 】**

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

解: 存在非零矩阵 B 满足 $AB = \mathbf{0}$, 说明方程组

$$Ax = \mathbf{0}$$

有非零解, 从而 A 的列向量线性相关.

另一方面, $AB = \mathbf{0}$ 即 $B^T A^T = \mathbf{0}$, 又 $A \neq \mathbf{0}$, 即方程组

$$B^T x = \mathbf{0}$$

有非零解. 从而 B^T 的列向量线性相关, 即 B 的行向量线性相关. 故选 (A).

方法二. 设矩阵 A 的列数 (也是 B 的行数) 为 n . 因 $AB = \mathbf{0}$, 所以

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

又 $A \neq \mathbf{0}, B \neq \mathbf{0}$, 知 $r(A) \geq 1, r(B) \geq 1$. 所以

$$r(A) \leq n - 1, \quad r(B) \leq n - 1,$$

故选 (A).

直观的理解是, 注意到矩阵 AB 的列是矩阵 A 的列的线性组合, 矩阵 AB 的行是矩阵 B 的行的线性组合, 由题设知 A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

方法三. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, 则在非零矩阵 B 中至少存在一个非零的列向量 $(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{mi})^T$ 使得

$$b_{1i}\alpha_1 + b_{2i}\alpha_2 + \dots + b_{mi}\alpha_m = \mathbf{0}.$$

所以 A 的列向量组线性相关. 类似可判断 B 的行向量组线性相关. \square


Example 129 (2002 数三). 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $ABx = \mathbf{0}$ **【 】**

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当 $n > m$ 时必有非零解.
 (C) 当 $n < m$ 时仅有零解. (D) 当 $n < m$ 时必有非零解.

解: 注意到 AB 是 $m \times m$ 矩阵, 即 $ABx = \mathbf{0}$ 是 m 元方程组. 当 $n < m$ 时, $r(A) \leq n, r(B) \leq n$. 所以

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq n < m,$$

系数矩阵 AB 的秩小于未知量的个数, 导致方程组 $ABx = \mathbf{0}$ 有非零解. 选 (D). \square

 见教材 P.148 习题 17.

Example 130 (2000 数一, P.378 题 8). 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m < n$)

线性无关, 则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充要条件为 【 】

(A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ 等价.

解: 选 (D). 已知 $r(A) = m$, 则

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关,

$$\iff r(B) = m,$$

$$\iff r(A) = r(B),$$

$$\iff A \cong B \text{ (注意到 } A, B \text{ 是同型矩阵).}$$

□

强调: $A \cong B$ 则 $r(A) = r(B)$, 但反之不一定成立, 除非 A, B 是同型矩阵. 因为不同型的矩阵也可能秩相等, 但不同型的矩阵是不可能等价的. (比较教材 P.148 题 24: 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $A \cong B$ 的充要条件是 $r(A) = r(B)$.)

要特别注意选项 (C) 是错误的.

$$\text{反例: 设 } (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 而 } (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 这里 } \beta_1, \beta_2 \text{ 线性无}$$

关, 但是得不到“向量组 α_1, α_2 与向量组 β_1, β_2 等价”.

注意向量组等价与矩阵等价的差别: 矩阵等价不能推出它们的行向量组 (或列向量组) 是等价的.

Example 131 (P.377 题 6). 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

(1) 问 p 为何值时, 该向量组线性无关? 此时用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 表示向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$.

(2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 此时求它的秩和一个极大线性无关组.

解: 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha)$ 进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(r_3+3r_2)/(-7) \\ r_4+2r_2 \\ r_2 \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 3r_3 \\ (r_2 - r_3)/2 \\ r_4 - (p-9)r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array} \right) \quad (40)$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 且

3.257


$$(40) \xrightarrow{r_4 \div (p-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array} \right) \xrightarrow{r_2-2r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3p-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array} \right).$$

得

$$\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3p-4}{p-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-p}{p-2}\alpha_4.$$

(2) 当 $p = 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

其一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 或者为 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. \square

 当 $p = 2$ 时, $\alpha_4 = 2\alpha_2$.

3.258

注意, 这个题目其实是重要题型“带参量的线性方程组”的另一个提法: 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha,$$

相当于讨论下面方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 10x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + (p+2)x_3 + px_4 = 10. \end{cases}$$

3.259

Example 132. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解, 即 $A\beta \neq 0$. 证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

证: 方法一. 令

$$k_0\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \dots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0. \quad (41)$$

即

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_t)\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_t\alpha_t = 0. \quad (42)$$

在 (42) 式两边左乘矩阵 A , 注意到 $A\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, t$, 得

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_t)A\beta = 0.$$

因 $A\beta \neq 0$, 所以只能是

$$k_0 + k_1 + \dots + k_t = 0, \quad (43)$$

代入 (42) 式, 得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_t\alpha_t = \mathbf{0}.$$

又 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 为基础解系, 是线性无关的, 所以只能

3.260

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0,$$

代入 (43) 式, 得 $k_0 = 0$. 即要使 (41) 式成立只能是

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0,$$

得证向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

3.261

方法二. 由题设可知 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关.

事实上, 假若 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性相关, 而已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 则 β 可以由基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性表示, 从而 β 是方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解, 这与题设矛盾. 又

$$\begin{aligned} (\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t) &= (\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &\triangleq BK, \end{aligned}$$

而 K 可逆, 故 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

3.262

方法三. 先说明 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关 (如前述). 又

$$(\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t) \xrightarrow{j=2, \dots, t+1} (\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t),$$

所以

$$r(\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t) = r(\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t) = t + 1,$$

得证 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关. \square

3.263

7.2.2 线性方程组的解

Example 133. 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 方程组无解的充要条件是 $r(A) \neq r(A, b)$. 由

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & | & 3 \\ 1 & a & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & a & | & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 + (a-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & a & | & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & | & a-3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

若 $a = -1$, 则

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right),$$

此时 $r(\mathbf{A}) = 2$, $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, 方程组无解. 故答案为: $a = -1$.

而 $a = 3$ 时, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 2$, 方程组有无穷多解. \square

Example 134. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求方程组的全部解.

解: 将 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组, 得 $\lambda = \mu$. 即方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \lambda)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

记方程组的系数矩阵为 \mathbf{A} , 对增广矩阵 \mathbf{B} 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 + \lambda & 4 + \lambda & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_3 - r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_1 \div 2]{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (44) \end{aligned}$$

(I) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,

$$\mathbf{B} \cong \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (45)$$

此时 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 2 < n = 4$, 方程组有无穷多解. 得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}, \\ x_2 = -3x_3 - x_4 + 1, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \end{cases}$$

故其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

(II) 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时,

$$(44) \xrightarrow{r_3 \div (\lambda - \frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - \frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

此时 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 3 < n = 4$, 方程组有无穷多解. 得同解方程组及其通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1, \\ x_2 = -x_3, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -2x_3 + 1. \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

其中 k 为任意常数. □

Example 135. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, \mathbf{B} 为 3 阶非零矩阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$,

则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 即言线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解, 则 $|\mathbf{A}| = 0$. 又

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & t+3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7(t+3),$$

故 $t = -3$. □

Example 136. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是 **【 】**

- (A) 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 仅有零解, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解.
 (B) 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解.
 (C) 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 仅有零解.
 (D) 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解.

解: 若 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列基本结论要非常清楚:

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 仅有零解 $\iff r(\mathbf{A}) = n$.
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\iff r(\mathbf{A}) < n$.
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\iff r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = n$.
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解 $\iff r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < n$.

选项 (A) 错, 除非系数矩阵 \mathbf{A} 是方阵. (B) 错, 因不能判断 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是否有解. 正确答案是 (D). □

Example 137. 设 n 元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 中方程个数为 m , $r(\mathbf{A}) = r$, 则

【 】

- (A) 当 $r = m$ 时, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解.
- (B) 当 $r = n$ 时, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解.
- (C) 当 $n = m$ 时, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解.
- (D) 当 $r < n$ 时, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解.

解: 注意到方程个数为 m , 即 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) 行数为 m , $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq m$.

当 $r = m$ 时, 由 $m = r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq m$, 得 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = m$, 即 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解. 故选 (A).

(B) 错误: $r = n$ 不能得到 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$, 即不能判断 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是否有解.

(C) 错误: 只是说了 \mathbf{A} 为方阵而已.

(D) 错误: 不能判断 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是否有解. □

3.272

Example 138. 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* \neq \mathbf{0}$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的互不相等的解, 则对应的齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系 【 】

- (A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.
- (C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

解: 已知 $\mathbf{A}^* \neq \mathbf{0}$, 即 \mathbf{A} 至少有一个代数余子式不等于零, 则 \mathbf{A} 至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 故 $r(\mathbf{A}) \geq n-1$.

又 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的互不相等的解, 即言 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解不唯一, 所以 \mathbf{A} 不是满秩的, 得 $r(\mathbf{A}) \leq n-1$.

综上得 $r(\mathbf{A}) = n-1$, 则齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系仅含一个非零解向量, 故选 (B). □

3.273

Example 139 (P.381 题 35(2002 数四)). 已知 4 元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

又已知另一个 4 元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \quad \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

解: (1) 方程组 (I) 的一个基础解系为 $\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T$, $\beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$.

(2) 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解, 将 (II) 的通解 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 代入 (I) 中, 得

3.274

$$\begin{cases} (a+1)k_1 = 0, \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0. \end{cases}$$

当 $a \neq -1$ 时, $k_1 = k_2 = 0$, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \mathbf{0}$, 则 (I) 和 (II) 无非零公共解;

当 $a = -1$ 时, k_1, k_2 任意, 此时 (I) 和 (II) 有非零公共解, 且全部非零公共解为

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

k_1, k_2 为不全为零的任意实数. □

3.275

Example 140 (2005 数四). 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases} \text{ 和 } (II) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

解: 记两方程组的系数矩阵分别为 \mathbf{A}, \mathbf{B} .

因 \mathbf{A} 的前两行不成比例, 则 $r(\mathbf{A}) \geq 2$, 又 $r(\mathbf{B}) \leq 2$, 由 (I) 和 (II) 同解, 得

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 2.$$

所以 $|\mathbf{A}| = 0$, 由

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a$$

得 $a = 2$. 对系数矩阵 \mathbf{A} 作初等行变换, 有

3.276

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$


得 (I) 的一个基础解系: $(-1, -1, 1)^T$, 代入 (II), 有

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0, \\ -2 - b^2 + c + 1 = 0, \end{cases}$$

得 $b = 1, c = 2$, 或 $b = 0, c = 1$.

当 $b = 0, c = 1$ 时, $r(\mathbf{B}) = 1$, 从而 (I) 和 (II) 不可能同解. 故 $b = 0, c = 1$ 应舍去.

综上, 当 $a = 2, b = 1, c = 2$ 时, (I) 和 (II) 同解. □

 注意“同解”和“有公共解”的差异. 若线性方程组同解, 则两者的系数矩阵的秩是相等的.

3.277

Example 141 (2003). 设有齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

- ① 若 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解均是 $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 则 $r(\mathbf{A}) \geq r(\mathbf{B})$.
- ② 若 $r(\mathbf{A}) \geq r(\mathbf{B})$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解均是 $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.
- ③ 若 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解, 则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

④ 若 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解.

以上命题正确的是

【 】

- (A) ①②. (B) ①③. (C) ②④. (D) ③④.

解: 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解均是 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 的解, 则可以认为前者的基础解系是后者基础解系的一部分, 从而 $n - r(\mathbf{A}) \leq n - r(\mathbf{B})$, 得 $r(\mathbf{A}) \geq r(\mathbf{B})$. 所以 ① 正确.

若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解, 则两者的基础解系相同, 所以 $n - r(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{B})$, 得 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. 知 ③ 正确. (这可以作为一个小的结论.)

故选 (B).

② 和 ④ 犯的是一样的错误. 因为, 由系数矩阵秩的关系, 不能得到方程组解之间的关系. □

3.278

Example 142 (2001 数三). 设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量, 若 $r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} = r(\mathbf{A})$, 则线性方程组 【 】

- (A) $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多个解. (B) $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解.
(C) $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 仅有零解. (D) $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 必有非零解.

解: 已知 $r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} = r(\mathbf{A})$, 而 $r(\mathbf{A}) \leq n$, 所以 $r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} < n + 1$, 得 $n + 1$ 元齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解. 选 (D).

另外, 由 $r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{pmatrix} \geq r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \geq r(\mathbf{A})$, 可得 $r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = r(\mathbf{A})$, 只能说明方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\alpha}$ 有解, 不能断定解是否唯一, 选项 (A), (B) 都是不恰当的. □

3.279

Example 143 (2005 数一). 已知三阶矩阵 \mathbf{A} 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 求线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的通解.

解: a, b, c 不全为零, 则 $r(\mathbf{A}) \geq 1$. 又 $1 \leq r(\mathbf{B}) \leq 3 - r(\mathbf{A})$, 所以 $1 \leq r(\mathbf{A}) \leq 2$.

(1) 若 $r(\mathbf{A}) = 2$. 则 $r(\mathbf{B}) = 1, k = 9$, 这时 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 于是通解为 $k_1 \boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 是任意实数).

(2) 若 $r(\mathbf{A}) = 1$. 则 $r(\mathbf{B}) = 1$ 或 2 .

(i) $r(\mathbf{B}) = 2$, 则 $k \neq 9$, 这时 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ 是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 于是通解为 $k_1 \boldsymbol{\xi}_1 + k_2 \boldsymbol{\xi}_2$, k_1, k_2 是任意实数. (ii) $r(\mathbf{B}) = 1$, 则 $k = 9$, 这时 \mathbf{B} 的列向量不能构成方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系. 由 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$,

3.280

得 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 不妨设 $a \neq 0$, 得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 于是通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, k_1, k_2 是任意实数. \square

3.281

7.2.3 矩阵的秩

Example 144. 设 3 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 \mathbf{A} 的伴随矩阵的秩等于 1, 则

必有

【 】

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$.

(B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$.

(D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

解: 由关系式

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } r(\mathbf{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } r(\mathbf{A}) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } r(\mathbf{A}) \leq n - 2. \end{cases}$$

已知 $r(\mathbf{A}^*) = 1$, 得 $r(\mathbf{A}) = 2$, 则 $|\mathbf{A}| = 0$.

3.282

计算得

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a + 2b)(a - b)^2,$$

所以 $a = b$ 或 $a + 2b = 0$.

而 $a = b$ 时, 有 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$, 得 $\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$, 不合题意, 所以要求 $a \neq b$.

选 (C). \square

3.283

Example 145. 设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, 试证: $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \geq n$.

证: 注意到 $r(\mathbf{A}) = r(-\mathbf{A})$, 有

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) &= r(-\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \\ &\geq r((-\mathbf{A}) + (\mathbf{A} + \mathbf{I})) \\ &= r(\mathbf{I}) = n. \end{aligned}$$

\square

3.284

Example 146. 设 \mathbf{A} 是 4×3 矩阵, 且 $r(\mathbf{A}) = 2$, 而 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则 $r(\mathbf{AB}) =$ _____.

解: 因为 $|\mathbf{B}| = 10 \neq 0$, 即 \mathbf{B} 可逆. 所以 $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{A}) = 2$. \square

3.285

Example 147. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且 $r(\mathbf{A}) = 3$, 则 $k =$ _____.

解: 由 $r(\mathbf{A}) = 3$, 知 $|\mathbf{A}| = 0$. 又

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3,$$

得 $k = -3$, 或 $k = 1$ (此时 $r(\mathbf{A}) = 1$, 舍去). 故 $k = -3$. □

3.286

Example 148. 设 $n (n \geq 3)$ 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 若 $r(\mathbf{A}) = n-1$, 则 a

必为

【 】

- (A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

解: 由 $r(\mathbf{A}) = n-1$, 知 $|\mathbf{A}| = 0$. 又

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1 + (n-1)a](1-a)^{n-1},$$

得 $a = \frac{1}{1-n}$, 或 $a = 1$. 而 $a = 1$ 时 $r(\mathbf{A}) = 1$, 舍去. 选 (B). □

3.287

Example 149. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{C} 是 n 阶可逆矩阵, 矩阵 \mathbf{A} 的秩为 r , 矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$ 的秩为 r_1 , 则

【 】

- (A) $r > r_1$; (B) $r < r_1$;
(C) $r = r_1$; (D) r 与 r_1 的关系依 \mathbf{C} 而定.

解: 由 $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$, 及 \mathbf{C} 是 n 阶可逆矩阵, 知 $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$, 故选 (C).

这个题目很基本: 可逆矩阵与矩阵相乘, 不改变矩阵的秩. 见教材矩阵秩的性质 3. 其根源是初等变换不改变矩阵的秩. □

3.288

Example 150. 若 $\mathbf{A}_{n \times m} \mathbf{B}_{m \times n} = \mathbf{I}_n$ ($n < m$), 证明: $r(\mathbf{B}_{m \times n}) = n$.

证: 注意到 $n < m$, 有

$$\begin{aligned} n &= r(\mathbf{I}_n) = r(\mathbf{A}_{n \times m} \mathbf{B}_{m \times n}) \\ &\leq r(\mathbf{B}_{m \times n}) \leq \min\{n, m\} = n, \end{aligned}$$

所以, $r(\mathbf{B}_{m \times n}) = n$. □

3.289

Example 151. 试证: $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$ 当且仅当方程组 $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$ 的解均为 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 的解.

证: 当方程组 $ABx = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解时, 由于 $Bx = 0$ 的解均为 $ABx = 0$ 的解, 故两方程组同解, 于是其系数矩阵的秩相同.

当 $r(AB) = r(B)$ 时, 记 W_{AB}, W_B 分别为方程组 $ABx = 0, Bx = 0$ 的全体解向量. 则

$$\dim W_{AB} = n - r(AB) = n - r(B) = \dim W_B.$$

又 $Bx = 0$ 的解均为 $ABx = 0$ 的解, 即 $W_B \subseteq W_{AB}$, 所以必有 $W_B = W_{AB}$. 故两方程组同解, 得方程组 $ABx = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解. \square

3.290

Example 152. 设 $r(AB) = r(B)$, 试证对任意可乘的矩阵 C , 均有 $r(ABC) = r(BC)$.

证: 由 151 题, 只需证明: 方程组 $ABCx = 0$ 的解均为 $BCx = 0$ 的解.

设 y_0 为 $ABCx = 0$ 的解, 即 $ABCy_0 = 0$, 下证 $BCy_0 = 0$.

记 $Cy_0 = x_0$, 则 $ABx_0 = 0$. 又 $r(AB) = r(B)$, 由 151 题知 $ABx = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解, 故 $Bx_0 = 0$. 即 $BCy_0 = 0$. \square

3.291

7.2.4 解矩阵方程

求解形如 $AXB = C$ 的方程, 仍然可以使用初等变换的方法 (假定 A, B 可逆). 分两步:

(i) 由初等行变换

$$(A, C) \xrightarrow{r} (I, A^{-1}C),$$

算得 $A^{-1}C$;

(ii) 由初等列变换

$$\left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline A^{-1}C & \end{array} \right) \xrightarrow{c} \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline A^{-1}CB^{-1} & \end{array} \right),$$

得到 $A^{-1}CB^{-1}$.

3.292

Example 153. 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解: 记方程组为 $AXB = C$.

$$(A, C) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 - \frac{2}{3}r_2 \\ r_2 \div 6}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right),$$

即 $XB = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. 又

3.293

$$\left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline A^{-1}C & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

所以, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

□