

Chapter 4

向量空间与线性变换

Linear Algebra

December 8, 2016

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

4.1

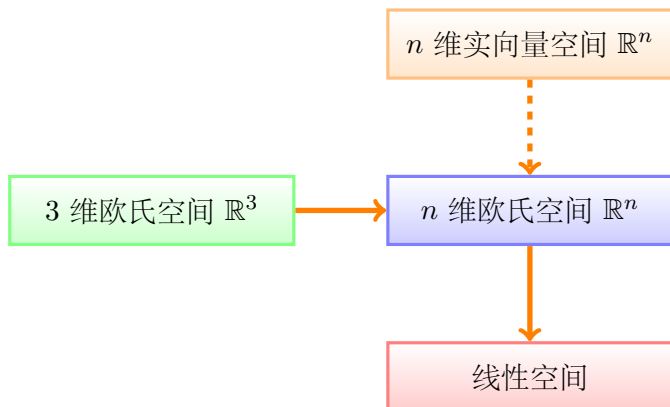
目录

1	\mathbb{R}^n 的基与向量关于基的坐标	2
2	\mathbb{R}^n 中向量的内积 标准正交基和正交矩阵	6
2.1	n 维实向量的内积, 欧氏空间	6
2.2	标准正交基	8
2.3	施密特正交化方法	8
2.4	正交矩阵及其性质	12
3	线性空间的定义及简单性质	14
4	线性子空间	18
5	线性空间的基 维数 向量的坐标	22
6	向量空间的线性变换	28
6.1	线性变换的定义及其简单性质	28
6.2	线性变换的矩阵表示	32
6.3	线性变换的运算	37
6.4	线性变换的像 (值域) 与核	39
7	习题	41

4.2

这一章准备讲什么?

- (1) 把 n 维实向量空间装配上内积, 得到 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n ;
- (2) 再进一步推广, 得到更一般的、抽象的线性空间的概念.



前面我们建立了“ n 维实向量空间 \mathbb{R}^n ”的概念，但它还不是三维欧氏空间的推广，因为它还缺少向量的长度、夹角、垂直等几何概念（几何建立的早期目的就是讨论长度、夹角等度量性质）。

长度、夹角这几个概念都可以由内积导出，故只需要在 \mathbb{R}^n 中装配上内积的概念即可，从而得到 n 维欧几里得空间的概念。

\mathbb{R}^n 中的极大无关组，可以线性表示 \mathbb{R}^n 中的任何一个向量，且表示的系数是唯一的，这就如同三维欧氏空间中的坐标系的功能。

这个现象在别的地方也会发生。

例如在 2×2 维实矩阵空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ，矩阵

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的。

事实上，设

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

只能得到 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ ；而且可以线性组合出 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中的任何一个矩阵，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

这表明这一组矩阵 $\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}$ 是一个极大无关组，具备坐标系的功能。

所有次数不超过 n 的多项式函数的集合 $\mathbb{R}[x]_n$ 中，函数

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \dots, \quad x^n,$$

显然可以视为一个极大无关组，具备坐标系的功能。

这些与空间 \mathbb{R}^n 相仿的特点，意味着可以把 $\mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbb{R}[x]_n$ 等视为一个向量空间来研究，这就产生了线性空间（也称为向量空间）的概念。

1 \mathbb{R}^n 的基与向量关于基的坐标

- 本节关键词：基，坐标，过渡矩阵。

证: 由已知得

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$, 则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

由已知条件得 \boldsymbol{B} 可逆, 故 \boldsymbol{C} 可逆的充要条件是 \boldsymbol{A} 可逆. 而 \boldsymbol{C} 可逆等价于其列向量 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关. 得证. \square


Definition 3. 设 \mathbb{R}^n 的两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵, 或称 \boldsymbol{A} 是基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵.

 过渡矩阵当然是可逆的.

Theorem 4. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T.$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 \boldsymbol{A} , 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \left(\mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right),$$

由于 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标是唯一的, 故

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad \text{或} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}. \quad \square$$

4.14


Example 5. 已知 \mathbb{R}^3 的一组基 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 为 $\beta_1 = (1, 2, 1)^T$, $\beta_2 = (1, -1, 0)^T$, $\beta_3 = (1, 0, -1)^T$, 求自然基 $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵 \mathbf{A} .

解: 由

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

得过渡矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

 在 \mathbb{R}^n 中, 由自然基 $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 到基 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵 \mathbf{A} , 就是将 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 按列排成的矩阵. 即

$$\mathbf{A} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

4.15

Example 6. 已知 \mathbb{R}^3 的两组基为 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 及 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 1)^T, & \alpha_2 &= (0, 1, 1)^T, & \alpha_3 &= (0, 0, 1)^T, \\ \beta_1 &= (1, 0, 1)^T, & \beta_2 &= (0, 1, -1)^T, & \beta_3 &= (1, 2, 0)^T. \end{aligned}$$

(i) 求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 \mathbf{A} ;

(ii) 已知 α 在基 B_1 下的坐标为 $(1, -2, -1)^T$, 求 α 在基 B_2 下的坐标.

解: (i) 设

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mathbf{A},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A},$$

故

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.16

由

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right),$$

故

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) 设所求坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^T$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

代入 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\mathbf{A}$, 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故


$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2 \mathbb{R}^n 中向量的内积 标准正交基和正交矩阵

2.1 n 维实向量的内积, 欧氏空间

怎样几何地看待 n 维实向量空间? 比如, 是否可以讨论 n 维向量的垂直、平行等概念?

- 这需要讨论向量的夹角、长度等概念.
- 内积的概念讨论, 方便地给出了长度和夹角的概念.
- 装配了内积的 n 维实向量空间, 称为欧几里德空间.

 用几何的观念, 理解和研究代数问题.

在解析几何中, 设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$, 它们的数量积 (又称内积) 为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\| \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

有了数量积 (内积) 的概念, 向量的长度和夹角就可以表示为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})},$$

$$\theta = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

Definition 7. 在 n 维向量空间 \mathbb{R}^n 中, 对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 我们规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (1)$$

当 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为列向量时,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}.$$

内积具有下列运算性质:

- (i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$;
- (ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$;
- (iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$;
- (iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$.

Definition 8. 在 n 维向量空间 \mathbb{R}^n 中, 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

Theorem 9. 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ 和任意 $k \in \mathbb{R}$ 有:

1. $\|k\boldsymbol{\alpha}\| = |k| \|\boldsymbol{\alpha}\|$;
2. $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$ (Cauchy-Schwarz 不等式);
3. $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$ (三角不等式).

Definition 10. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

Definition 11. $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交 (orthogonal) 或垂直. 记为 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$.

Theorem 12. 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的充要条件是

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

零向量与任何向量的内积为零, 故零向量与任何向量正交.

Definition 13. 定义了内积运算的 n 维实向量空间, 称为 n 维欧几里德空间, 简称欧氏空间, 仍记作 \mathbb{R}^n .

2.2 标准正交基

Theorem 14. \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0},$$


则

$$(\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0,$$

注意到 $\alpha_i \neq \mathbf{0}$, 则 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$, 故

$$k_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

得证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关. □

 正交关系强于线性无关关系.

4.26

Definition 15. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基.

或者记 (2) 式为

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}.$$

比如 i, j, k 就是 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基. 但标准正交基不唯一.

4.27

Example 16. 设 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基, 求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则

$$(\beta, \alpha_1) = (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n, \alpha_1) = (x_1\alpha_1, \alpha_1) = x_1,$$

同理, $x_2 = (\beta, \alpha_2), \dots, x_n = (\beta, \alpha_n)$. □

4.28

2.3 施密特正交化方法

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, ($m \leq n$), 求一个标准正交向量组 η_1, \dots, η_m , 并且满足:

$\forall i \leq m$, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ 与向量组 η_1, \dots, η_i 等价.

施密特正交化过程¹给出了解决上述问题的一个方法.

从几何上看, 如果空间 \mathbb{R}^n 上的一组向量能够组成一个子空间, 那么这一组向量就称为这个子空间的一个基. 该方法是通过这一子空间上的一个基, 得出子空间的一个标准正交基, 并且满足: 任意前 i 个向量构成的是同一个子空间.

该方法的基本思想: 利用投影原理, 在已有正交基的基础上, 构造一个新的正交基.

4.29

Jørgen P. Gram



Jørgen P. Gram (1850–1916) was a Danish actuary who implicitly presented the essence of orthogonalization procedure in 1883. Gram was apparently unaware that Pierre-Simon Laplace (1749–1827) had earlier used the method. Today, Gram is remembered primarily for his development of this process, but in earlier times his name was also associated with the matrix product $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ that historically was referred to as the *Gram matrix* of \mathbf{A} .

4.30

Erhard Schmidt



Erhard Schmidt (1876–1959) was a German mathematician whose work significantly influenced the direction of mathematics in the twentieth century. He was a student of Hermann Schwarz and the great German mathematician David Hilbert. Schmidt explicitly employed the orthogonalization process in 1907 in his study of integral equations, which in turn led to the development of what are now called *Hilbert spaces*. Schmidt made significant use of the orthogonalization process to develop the geometry of Hilbert Spaces, and thus it came to bear Schmidt's name.

4.31

以三维空间为例

设有不共面的三个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$, 由这三个向量, 我们构造一组两两正交的向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. 并且满足: α_1 与 β_1 等价; α_1, α_2 与 β_1, β_2 等价; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价. 没有这个要求的话, 随便找 3 个两两正交的向量都是与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的, 例如基本单位向量 i, j, k . 那么施密特正交化过程就没有出现的必要了.

4.32

设有两个向量 α_1, α_2 如图 1(a).

先直接取 $\beta_1 \triangleq \alpha_1$, 如图 1(b).

记 α_2 在 α_1 上的投影向量为 γ , 则可令 $\beta_2 \triangleq \alpha_2 - \gamma$, 使得 $\beta_2 \perp \beta_1$. 下面给出 γ 的表达式.

4.33

¹也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram-Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.

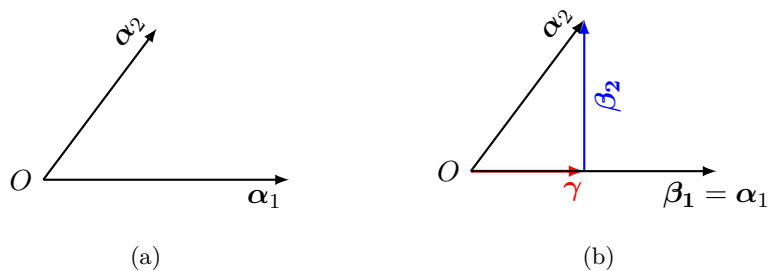


图 1: $\beta_2 \triangleq \alpha_2 - \gamma$, 其中 γ 是 α_2 在向量 α_1 所张成的一维子空间上的投影向量.

α_2 在 α_1 上的投影为:

$$\text{Prj}_{\alpha_1} \alpha_2 = \|\alpha_2\| \cdot \cos(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \|\alpha_2\| \cdot \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{\|\alpha_1\| \|\alpha_2\|} = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{\|\alpha_1\|},$$

则 α_2 在 α_1 上的投影向量为:

$$\gamma = \text{Prj}_{\alpha_1} \alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{\|\alpha_1\|} \cdot \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1. \quad (3)$$

所以

$$\beta_2 = \alpha_2 - \gamma = \alpha_2 - \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1.$$

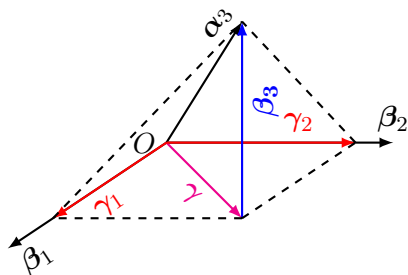


图 2: $\beta_3 \triangleq \alpha_3 - \gamma$, 其中 γ 是 α_3 在 β_1, β_2 所张成子空间上的投影向量.

记 α_3 在 β_1, β_2 所在平面的投影向量为 γ , 若令 $\beta_3 \triangleq \alpha_3 - \gamma$, 则 β_3 垂直于 β_1, β_2 所在的平面, 从而 $\beta_3 \perp \beta_1, \beta_3 \perp \beta_2$, 如图 2.

记 α_3 在 β_1, β_2 上的投影向量分别为 γ_1, γ_2 , 则 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. 与 (3) 式同理有

$$\gamma_1 = \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \quad \gamma_2 = \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

所以

$$\beta_3 = \alpha_3 - \gamma = \alpha_3 - \gamma_1 - \gamma_2 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2.$$

如此求得的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是两两正交的非零向量组. 再将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化, 即取

$$\eta_j = \frac{1}{\|\beta_j\|} \beta_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

则 η_1, η_2, η_3 是 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基.


在 n 维空间 \mathbb{R}^n , 给定一组线性无关的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, ($m \leq n$), 其施密特正交化过程可以类似地理解和记忆: 记前 i ($i \leq m$) 个向量构成的子空间为 V , 设 α_{i+1} 在 V 上的投影向量为 γ , 则

$$\beta_{i+1} \triangleq \alpha_{i+1} - \gamma$$

Schmidt 正交化过程的步骤

- (1) $\beta_1 = \alpha_1$;
- (2) $\beta_j = \alpha_j - \frac{(\alpha_j, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_j, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_j, \beta_{j-1})}{(\beta_{j-1}, \beta_{j-1})}\beta_{j-1}$;
- (3) $\eta_j = \frac{1}{\|\beta_j\|}\beta_j, j = 1, 2, \dots, m.$

上述从线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 导出标准正交向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 的过程, 称为 Schmidt 正交化过程.

 在向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和向量组 η_1, \dots, η_m 中, 同时任取前 i 个向量, 所得的两个向量组是等价的. 请思考: 为什么?

Example 17. 试用施密特法把下列向量组正交化: $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

解: 由施密特正交化方法得

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1 - \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Example 18. 已知 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, 使得 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 两两正交.

解: $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 应满足 $\mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

把基础解系正交化, 即为所求. 故

$$\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)}{(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1)} \boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\mathbf{a}_2 = (1, 0, -1)^T$, 要满足正交, 则应有

$$\mathbf{a}_3 = (1, \square, 1)^T.$$

这里方框 \square 表示一个待定的量. 又要满足方程, 所以

$$\mathbf{a}_3 = (1, -2, 1)^T.$$


从而得到一组正交的基础解系:

$$\mathbf{a}_2 = (1, 0, -1)^T, \quad \mathbf{a}_3 = (1, -2, 1)^T. \quad (4)$$

类似地, 还可以取

$$\mathbf{a}_2 = (1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{a}_3 = (1, 1, -2)^T. \quad (5)$$

或者 $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1)^T, \mathbf{a}_3 = (-2, 1, 1)^T$, 等等. \square

 请留意这个方法, 非常简单有效, 以后经常可以用到!

2.4 正交矩阵及其性质

Definition 19. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, 就称 \mathbf{A} 为正交矩阵.

$$\mathbf{A} \text{ 为正交矩阵} \iff \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \iff \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

Theorem 20. A 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: A 的列向量组为 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基.

证: 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 于是

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix},$$

因此, $A^T A = I$ 的充要条件是

$$\alpha_i^T \alpha_j = (\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}.$$

即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基. □

☞ 正交矩阵的行向量也是一组两两正交的单位向量. 4.43

Example 21. 验证矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

证: P 的每个列向量都是单位向量, 且两两正交, 所以 P 是正交矩阵.

或者验证 $P^T P = I$ 即可. □

Theorem 22. 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则

- (i) $\det A = 1$ 或 -1 .
- (ii) $A^{-1} = A^T$.
- (iii) A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵.
- (iv) AB 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$(A^T)^T A^T = AA^T = AA^{-1} = I,$$

故 A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵.

(iv) 由

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T B = I,$$

故 AB 也是正交矩阵. □

Theorem 23. 若列向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax, Ay \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$(Ax, Ay) = (x, y), \tag{6}$$

$$\|Ax\| = \|x\|, \quad \|Ay\| = \|y\|, \tag{7}$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle. \tag{8}$$

证: (1) $(Ax, Ay) = (Ax)^T(Ay) = x^T A^T Ay = x^T y = (x, y)$.

(2) 在上式中取 $y = x$, 有 $(Ax, Ax) = (x, x)$, 即 $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$, 故

$$\|Ax\| = \|x\|.$$

同理有 $\|Ay\| = \|y\|$.

(3) 由

$$\cos\langle Ax, Ay \rangle = \frac{(Ax, Ay)}{\|Ax\|\|Ay\|} = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|} = \cos\langle x, y \rangle,$$

得证 $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. □

4.46

3 线性空间的定义及简单性质

概念的源起

- 向量在加法运算、数乘运算所满足的运算规律, 例如

– 加法交换律: $x + y = y + x$,

– 加法结合律: $(x + y) + z = x + (y + z)$,

– 数乘分配律: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

矩阵、多项式、连续函数等, 也都满足完全相同的运算规律.

- 研究不同对象在线性运算方面的所表现的共性, 导致线性空间的公理化定义.
- 方法: 代数与几何的结合.

4.47

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F , 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V : 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.
- F : 一个数域——实数域 \mathbb{R} 或者复数域 \mathbb{C} .
- 向量加法 (记为 $x + y$): 集合 V 中两个元素之间的一种运算. 运算要满足封闭性: $x + y \in V, \forall x, y \in V$.
- 数量乘法 (记为 λx): 集合 F 和 V 中元素之间的一种运算. 运算要满足封闭性: $\lambda x \in V, \forall \lambda \in F, \forall x \in V$.

4.48

线性空间的定义

Definition 24 (线性空间). 设 V 是一个非空集合, F 是一个数域.

- 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做加法; 这就是说给出了一个法则, 对于 V 中任意两个元素 x 与 y , 在 V 中都有唯一的一个元素 z 与它们对应, 称为 x 与 y 的和, 记为 $z = x + y$.

- 在数域 F 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算, 叫做数量乘法; 这就是说, 对于数域 F 中任一个数 λ 与 V 中任一个元素 x , 在 V 中都有唯一的一个元素 y 与它们对应, 称为 λ 与 x 的数量乘积, 记为 $y = \lambda x$.

如果加法与数量乘法满足下述规则, 那么 V 称为数域 F 上的线性空间.

加法满足下面四条规则:

- (1) $x + y = y + x$;
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (3) 在 V 中有一个元素 θ , $\forall x \in V$, 都有

$$x + \theta = x$$

(具有这个性质的元素 θ 称为 V 的零元素, 记为 0);

- (4) $\forall x \in V, \exists y \in V$, 使得

$$x + y = 0$$

(y 称为 x 的负元素, 记为 $-x$).

数量乘法满足下面两条规则:

- (5) $1x = x$;
- (6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

数量乘法与加法满足下面两条规则:

- (7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- (8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

在以上规则中, λ, μ 等表示数域 F 中任意数; x, y, z 等表示集合 V 中任意元素.

按习惯, V 中的元素称为向量, F 中的数称为数或标量. V 称为线性空间的基集.

线性空间的实例

Example 25 (n 维向量空间). $\bullet \mathbb{R}^n$: n 元实坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.

$$V = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}, F = \mathbb{R}.$$

- $\bullet \mathbb{C}^n$: n 元复坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.

$$V = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n\}, F = \mathbb{C}.$$

注意

- 若 $V = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 而 $F = \mathbb{C}$, 则 V 不是线性空间. 因为此时数量乘法不满足封闭性.
- $V = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n\}, F = \mathbb{R}$, 此时 V 任是一个线性空间. 记为 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^n$.

Example 26. 元素属于数域 F 的 $m \times n$ 矩阵, 按 (1) 矩阵的加法, (2) 数与矩阵的数量乘法, 构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F^{m \times n}$ 表示.

- $\mathbb{R}^{m \times n}$: $m \times n$ 阶实矩阵空间.
- $\mathbb{C}^{m \times n}$: $m \times n$ 阶复矩阵空间.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$. F 称为 $F[x]$ 的系数域.

Example 27. • 数域 F 上一元多项式环 $F[x]$, 按 (1) 通常的多项式加法, (2) 数与多项式的乘法, 构成一个数域 F 上的线性空间.

- 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式, 再添上零多项式, 也构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F[x]_n$ 表示.

1. $\mathbb{R}[x]_n$: 实数域 \mathbb{R} 上的次数小于 n 的多项式空间,

$$\mathbb{R}[x]_n = \{p(x) \mid p(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

2. $\mathbb{C}[x]_n$: 复数域 \mathbb{C} 上的次数小于 n 的多项式空间,

$$\mathbb{C}[x]_n = \{p(x) \mid p(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{C}\}.$$

Example 28. 全体实函数, 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

Example 29. 记 $C[a, b]$ 为区间 $[a, b]$ 上所有连续函数的集合. 则 $C[a, b]$ 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

Example 30. 数域 P 按照本身的加法与乘法, 即构成一个自身上的线性空间.

注意

- 对同样的基集 V 和数域 F , 对它们规定不同的加法和数乘, 若构成线性空间, 则得到不同的线性空间.
- 线性空间的零向量, 也与该空间中向量加法和数量乘法的规定方法有关. 比如下面例题中的零元素是常数 1.

Exercise 31 (P.212 习题 17 (8)). 设 V 是正实数集, \mathbb{R} 为实数域. 定义加法 \oplus 和数乘 \odot :

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= \alpha\beta, & (\text{即 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的积}) \\ k \odot \alpha &= \alpha^k, & (\text{即 } \alpha \text{ 的 } k \text{ 次幂}) \end{aligned}$$

其中 $\alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{R}$. 问: V 对于加法 \oplus 和数乘 \odot 是否构成 \mathbb{R} 上的线性空间?

解: 加法 \oplus 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+, \alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

- (1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;
- (2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;
- (3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;
- (4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

数乘 \odot 封闭: $\forall \alpha \in V = \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}, k \odot \alpha = \alpha^k \in V = \mathbb{R}^+$. 且满足:

- (5) $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$;
 (6) $(k_1 k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1 k_2} = (\alpha^{k_2})^{k_1} = k_1 \odot (\alpha^{k_2}) = k_1 \odot (k_2 \odot \alpha)$;
 (7) $(k_1 + k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1 + k_2} = \alpha^{k_1} \alpha^{k_2} = \alpha^{k_1} \oplus \alpha^{k_2} = k_1 \odot \alpha \oplus k_2 \odot \alpha$;
 (8) $k \odot (\alpha \oplus \beta) = k \odot (\alpha \beta) = (\alpha \beta)^k = \alpha^k \beta^k = \alpha^k \oplus \beta^k = (k \odot \alpha) \oplus (k \odot \beta)$.

所以 V 对于加法 \oplus 和数乘 \odot 构成 \mathbb{R} 上的线性空间. □

4.55

Example 32. 设集合 $Z = \{z\}$. 向量加法: $z + z = z$. 数量乘法: $\lambda z = z, \lambda \in F$. 可以证明: 集合 Z 是数域 F 上的线性空间.

这个线性空间的零元素是什么? 显然, 只能是 z .

但有趣的是, 我们并没有指明 z 的具体内容. 事实上, z 可以是任何一个向量、矩阵、函数等等.

4.56

我们再次强调, 零向量不一定是形如 $0, (0, 0, \dots, 0)^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$, 向量加法:


$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1).$$

容易证明该集合是数域 \mathbb{C} 上的线性空间.

问题: 零向量是什么? (x_1, x_2) 的负向量呢?

 零向量: $\mathbf{0} = (-1, -1)$. 因为

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = (x_1, x_2) + (-1, -1) = (x_1 + (-1) + 1, x_2 + (-1) + 1) = (x_1, x_2) = \mathbf{u}.$$

负向量: $-(x_1, x_2) = (-x_1 - 2, -x_2 - 2)$. 事实上

$$(x_1, x_2) + (-x_1 - 2, -x_2 - 2) = (x_1 + (-x_1 - 2) + 1, -x_2 + (x_2 - 2) + 1) = (-1, -1) = \mathbf{0}.$$

4.57

线性空间是 n 维向量空间的抽象和推广.

为了几何直观, 我们也把线性空间叫做向量空间.

但这里的向量不一定是有序数组, 而是广义的向量, 例如函数、矩阵等.

4.58

线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.
2. 负元素是唯一的.
3. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}; k\mathbf{0} = \mathbf{0}; (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.
4. 如果 $k\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 那么 $k = 0$ 或者 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.59

4 线性子空间

平面 \mathbb{R}^2 是 \mathbb{R}^3 的子集, 而 \mathbb{R}^2 也构成线性空间, 称 \mathbb{R}^2 是 \mathbb{R}^3 的线性子空间.

过原点的一条直线或一个平面都是 \mathbb{R}^3 的子集, 而且它们关于向量加法和数乘分别构成一个一维和二维的线性空间.

考虑一般的情形: 线性空间的子集, 关于原线性空间的加法和数乘, 可能构成一个线性空间?

4.60


子空间

Definition 33. 数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集 S 称为 V 的一个线性子空间 (或简称子空间, subspace), 如果 S 对于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

Theorem 34. 如果线性空间 V 的一个非空集合 S 对于 V 的两种运算是封闭的, 即

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, 都有 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$;
2. $\forall \mathbf{x} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有 $\lambda \mathbf{x} \in S$.

那么 S 就是一个子空间.

 若 $\mathbf{x} \in S$, 则 $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in S$; 且 $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S$. 又 S 中的元素也是 V 的元素, 故满足 V 中的结合律、交换律、分配律等.

4.61

Theorem 35. 数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集 S 为 V 的一个线性子空间 $\iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有

$$\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S.$$

证: (1) 充分性. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 因

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= 1\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S, \\ \lambda \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x} + \mathbf{0} \in S, \end{aligned}$$

故 S 对于 V 的两种运算是封闭的. 即 S 为 V 的一个线性子空间.

(2) 必要性. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 由数乘封闭性, 有

$$\lambda \mathbf{x} \in S,$$

又由加法封闭性, 有

$$\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S. \quad \square$$

4.62

Example 36. 在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集是一个线性子空间, 它叫做零子空间.

Example 37. 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

每个线性空间至少有两个子空间: 零子空间和线性空间本身. 这两个子空间通常叫做 V 的平凡子空间 (trivial subspace), 而其它子空间叫做非平凡子空间.

Example 38. 在全体实函数组成的空间中, 所有的实系数多项式组成一个子空间.

Example 39. $F[x]_n$ 是线性空间 $F[x]$ 的子空间.

4.63

Example 40. 设 $A \in F^{m \times n}$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集合

$$S = \{x \mid Ax = 0\}$$

是 F^n 的一个子空间, 叫做齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间; 也称为矩阵 A 的零空间 (nullspace) 或核空间 (kernel), 记作 $N(A)$ 或 $\ker(A)$.

但是, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集合 W 不是 F^n 的子空间.

事实上, 若 $Ax = b$ 无解, 则 W 是空集, 当然 W 不是线性空间.

当 W 非空, 由于 $b \neq 0$, 则 $0 \notin W$, 因此 W 不是线性空间.

4.64

Example 41. 设 \mathbb{R}^3 的子集合

$$V_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$V_2 = \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 \mathbb{R}^3 的子空间; 而 V_2 不是 \mathbb{R}^3 的子空间.

V_1 是 x 轴上的全体向量; V_2 是过点 $(1, 0, 0)$ 与 z 轴平行的直线上的全体向量. 显然 V_2 关于加法和数乘不封闭.

4.65

Theorem 42. 设 V 为数域 F 上的线性空间, S 是 V 的一个非空子集, 则 S 中一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \mid \alpha_i \in S, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间.

证: (1) W 显然包含 S , 设 $\alpha, \beta \in W$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in S$ 及 $k_1, k_2, \cdots, k_m, l_1, l_2, \cdots, l_n \in F$, 使得

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

$$\beta = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_n\beta_n.$$

于是

$$\alpha + \beta = (k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m) + (l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n) \in W.$$

4.66

又 $\forall k \in F$, 有

$$k\alpha = k(k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m) = k_1\alpha_1 + \cdots + k k_m\alpha_m \in W,$$

所以 W 是 V 的一个子空间.

(2) 再设 W^* 是 V 中包含 S 的任一子空间, 则

$$\forall \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \in W,$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in S \subseteq W^*$, 所以必有 $\alpha \in W^*$, 从而 $W \subseteq W^*$, 因此 W 是 V 中包含 S 的最小的子空间. \square

4.67

Definition 43. 定理 42 中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的 V 的子空间, 或者说 S 生成 W .

当 S 为有限子集 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 时, 记

$$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (9)$$

并称 W 是由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的子空间.

也记 (9) 为

$$W = \text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

例如, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间就是由它的基础解系生成的子空间.

4.68

For example, if $u \neq 0$ is a vector in \mathbb{R}^3 , then $\text{span}[u]$ is the straight line passing through the origin and u .

If $S = \text{span}[u, v]$, where u and v are two nonzero vectors in \mathbb{R}^3 not lying on the same line, then $S = \text{span}[u, v]$ is the plane passing through the origin and the points u and v .

4.69

Example 44. • $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ spans the line $y = x$ in \mathbb{R}^2 .

• The unit vectors $\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ spans \mathbb{R}^3 .

• The unit vectors $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ in \mathbb{R}^n form a spanning set for \mathbb{R}^n .

• The finite set $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ spans the space of all polynomials such that $\deg p(x) \leq n-1$, and the infinite set $\{1, x, x^2, \dots\}$ spans the space of all polynomials.

4.70

Theorem 45. 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

由集合的交的定义有, 子空间的交适合下列运算规律:

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1, \quad (\text{交换律})$$

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3). \quad (\text{结合律})$$

由结合律, 可以定义多个子空间的交:

$$V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^s V_i,$$

它也是子空间.

4.71

Definition 46 (子空间的和). 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 所谓 V_1 与 V_2 的和, 是指由所有能表示成 $\alpha_1 + \alpha_2$, 而 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$ 的向量组成的子集合, 记作 $V_1 + V_2$.

Theorem 47. 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 那么它们的和 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间.

4.72

由定义有, 子空间的和适合下列运算规律:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V_2 + V_1, & (\text{交换律}) \\ (V_1 + V_2) + V_3 &= V_1 + (V_2 + V_3). & (\text{结合律}) \end{aligned}$$

由结合律, 可以定义多个子空间的和

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s = \sum_{i=1}^s V_i.$$

它是由所有表示成

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \quad \alpha_i \in V_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

的向量组成的子空间.

4.73

矩阵列空间、行空间

Definition 48. 矩阵 A 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 A 的列空间, 记作 $R(A)$.

矩阵 A 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 A 的行空间, 记作 $R(A^T)$.

若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 A 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}^m$, 且


$$R(A) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

是 \mathbb{R}^m 的一个子空间.

A 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}^n$, 且

$$R(A^T) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

是 \mathbb{R}^n 的一个子空间.

 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是: $b \in R(A)$.

4.74

子空间的正交关系

Definition 49. 设向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, W 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间, 如果对于任意的 $\gamma \in W$, 都有

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

就称 α 与子空间 W 正交, 记作 $\alpha \perp W$.

Definition 50. 设 V 和 W 是 \mathbb{R}^n 的两个子空间, 若 $\forall \alpha \in V, \forall \beta \in W$, 都有

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称 V 与 W 正交, 记为 $V \perp W$.

齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

其每个解向量与系数矩阵 \mathbf{A} 的每个行向量都正交, 所以解空间与 \mathbf{A} 行空间是正交的, 即

$$N(\mathbf{A}) \perp R(\mathbf{A}^T).$$

Theorem 51. \mathbb{R}^n 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 \mathbb{R}^n 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}),$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \perp V, k\boldsymbol{\alpha}_1 \perp V$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in W, \quad k\boldsymbol{\alpha}_1 \in W.$$

故 W 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间. □

Definition 52. \mathbb{R}^n 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的子空间 W , 称为 V 的正交补, 记作 $W = V^\perp$.

例如, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间 $N(\mathbf{A})$ 是由与 \mathbf{A} 的行向量都正交的全部向量构成, 所以

$$N(\mathbf{A}) = (R(\mathbf{A}^T))^\perp.$$

这是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间的一个基本性质.

5 线性空间的基 维数 向量的坐标

线性无关 (Linear independence)

Definition 53 (线性无关). 设 V 为数域 F 上的线性空间, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ 为 V 中的一组向量. 若存在 F 中的一组不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}, \quad (10)$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ 线性相关 (linearly dependent), 否则称为线性无关 (linearly independent).

换句话说, 向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ 称为线性无关, 如果等式 (10) 只有在

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

时才成立.

4.79

Example 54. 讨论 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

的线性相关性.

解: 设 $k_1 \boldsymbol{A}_1 + k_2 \boldsymbol{A}_2 + k_3 \boldsymbol{A}_3 + k_4 \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{O}$, 即

$$k_1 \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

故

$$\begin{cases} ak_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \\ k_1 + ak_2 + k_3 + k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 + ak_3 + k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 + ak_4 = 0, \end{cases}$$

系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3),$$

4.80

- 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -3$ 时, 方程组只有零解, 从而 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4$ 线性无关;
- 当 $a = 1$ 或 $a = -3$ 时, 方程组有非零解, 从而 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4$ 线性相关. \square

4.81

常用结论

1. 单个向量 \boldsymbol{x} 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 两个以上的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ 线性相关的充要条件是: 其中有一个向量是其余向量的线性组合.
2. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关, 而且可以被 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_s$ 线性表出, 那么 $r \leq s$.
由此推出, 两个等价的线性无关的向量组, 必含有相同个数的向量.
3. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关, 但 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}$ 线性相关, 那么 \boldsymbol{y} 可以被 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ 线性表出, 而且表示法是唯一的.

4.82

Definition 55 (维数, dimension). 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量, 但是没有更多数目的线性无关的向量, 那么就称 V 为 n 维的; 记为 $\dim V = n$. 如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么就称 V 为无限维的.

单个的零向量总是线性相关的. 事实上 $\forall \lambda \neq 0$, 都有

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

故零子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 中不存在线性无关的向量, 即

$$\dim\{\mathbf{0}\} = 0.$$

4.83

Definition 56. 在 n 维线性空间 V 中, n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为 V 的一组基 (basis). 记为

$$\mathcal{B}_V = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}.$$

设 \mathbf{x} 是 V 中任一向量, 于是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \mathbf{x}$ 线性相关, 因此 \mathbf{x} 可以被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出:

$$\mathbf{x} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$$

其中系数 a_1, a_2, \dots, a_n 是被向量 \mathbf{x} 和基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 唯一确定的, 这组数就称为 \mathbf{x} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$.

4.84

Example 57. 在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n$$

是 n 个线性无关的向量, 而且每一个次数不超过 n 的数域 \mathbb{R} 上的多项式都可以被它们线性表出, 所以 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $n+1$ 维的, 而 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n$ 就是它的一组基.

在这组基下, 多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ 的坐标就是其系数

$$(a_0, a_1, \dots, a_n)^T.$$

如果取 $\mathbb{R}[x]_n$ 中的另外一组基

$$1, (x-a), \dots, (x-a)^{n-1}, (x-a)^n,$$

按泰勒展开公式 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, 则 $f(x)$ 在此组基下的坐标是

$$\left(f(a), f'(a), \dots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)^T.$$

4.85

Example 58. 考虑 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad i$$

j

即矩阵 \mathbf{E}_{ij} 的元素在第 i 行第 j 列位置上为 1, 其他位置皆为 0.

称 $\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \dots, \mathbf{E}_{1n}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}, \dots, \mathbf{E}_{2n}, \dots, \mathbf{E}_{m1}, \mathbf{E}_{m2}, \dots, \mathbf{E}_{mn}$ 为空间 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 的标准基.

显然 $\dim \mathbb{C}^{m \times n} = mn$.

4.86

Example 59. 已知 $\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的标准基, 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

在该组基底下的坐标.

解: 由

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2\mathbf{E}_{11} + 3\mathbf{E}_{12} - 4\mathbf{E}_{21} + 5\mathbf{E}_{22}, \end{aligned}$$

故矩阵 \mathbf{A} 在该组基底下的坐标为 $(2, 3, -4, 5)^T$. \square

一般地, 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 在标准基 $\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}$ 下的坐标为

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T.$$

4.87

Example 60. • 如果把复数域 \mathbb{C} 看作是自身上的线性空间, 那么它是一维的, 数 1 就是一组基.

• 如果把复数域 \mathbb{C} 看作是实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 那么就是二维的, 数 1 与 i 就是一组基.

维数与所考虑的数域有关.

4.88

Theorem 61. 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 为 V 中的向量组, 则它为线性相关向量组的充要条件是, 其中必有 (至少有一个) 向量能由其余的向量线性表出.

Theorem 62. 向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 线性无关的充要条件是, 其中任一向量均不能由其余向量线性表出.

4.89

Theorem 63. n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量

$$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$$

均可以作为 V 的基.

Theorem 64. 设 V 是 n 维向量空间, 则 V 中任意 k ($k < n$) 个线性无关的向量

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$$

必可以扩充成 V 的一组基.

4.90

维数定理

Theorem 65. 设 S_1 和 S_2 均为数域 F 上的线性空间 V 的子空间, 则有

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

或记为

$$\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2).$$

☞ 和的维数往往比维数的和来得小. 例如在 \mathbb{R}^3 空间中, 两张通过原点的不同的平面之和是整个 \mathbb{R}^3 空间, 而其维数之和为 4.

4.91

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$. 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m.$$

它可以扩充成 S_1 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n_1-m}.$$

也可以扩充成 S_2 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n_2-m}.$$

下面来证明, 向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n_2-m}$$

是 $S_1 + S_2$ 的一组基, 这样 $\dim(S_1 + S_2) = n_1 + n_2 - m$, 因而维数公式成立.

4.92

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \dots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} \\ + q_1\gamma_1 + \dots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

令

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \dots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} \quad (11)$$

$$= -q_1\gamma_1 - \dots - q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}. \quad (12)$$

由等式 (11), 有 $\alpha \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\alpha \in S_2$. 于是 $\alpha \in S_1 \cap S_2$, 则 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 令 $\alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m$, 则

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \dots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n_2-m}$ 线性无关, 得

$$l_1 = l_2 = \dots = l_m = q_1 = \dots = q_{n_2-m} = 0,$$

因而 $\alpha = \mathbf{0}$.

从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}$ 线性无关, 故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, $S_1 + S_2$ 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

事实上, 设 $x \in S_1 + S_2$, 令 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. 则 x_1 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}$ 线性表示; 且 x_2 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$ 线性表示.

故 x 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$ 线性表示.

因而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$ 是 $S_1 + S_2$ 的一组基. 故维数公式成立. \square

Exercise 66. 试证多项式组 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一个基底, 并求由基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 过渡到基底 $\{1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\}$ 的过渡矩阵.

解: $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, 有

$$(x-1)^k = (-1)^k + C_k^1(-1)^{k-1}x + C_k^2(-1)^{k-2}x^2 + \cdots + C_k^{k-1}(-1)x^{k-1} + x^k$$

$$= (1, x, x^2, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \begin{bmatrix} (-1)^k \\ C_k^1(-1)^{k-1} \\ C_k^2(-1)^{k-2} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$(1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n) = (1, x, x^2, \cdots, x^n)P,$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & C_n^1(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_n^2(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}.$$

由于 $\det P = 1 \neq 0$, 所以 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一个基底, 且所求过渡矩阵为 P . \square

6 向量空间的线性变换

Definition 67. 设有映射 $T: X \rightarrow Y, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

- 若任意 $\boldsymbol{y} \in Y$ 都有原像 $\boldsymbol{x} \in X$, 则称 T 为从 X 到 Y 的 满映射 (onto mapping, surjection), 简称满射.
- 若对 X 中任意两个不同的元素 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$, 都有 $T\boldsymbol{x}_1 \neq T\boldsymbol{x}_2$, 则称 T 为一对一的映射 (one-to-one mapping), 或单射 (injection).
- 若 T 既是满射, 又是一对一的映射, 则称 T 是一一到上的映射, 或双射 (bijection).

4.97


6.1 线性变换的定义及其简单性质

线性变换的定义

Definition 68. 设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 映射 $T: X \rightarrow Y, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ 满足:

1. $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2), \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$;
2. $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in X, \lambda \in F$,

则称 T 为从 X 到 Y 的线性映射. 线性映射常称为线性变换 (linear transformation) 或线性算子 (linear operator).

 上述两个条件或者等价地表示为

$$T(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2), \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in F.$$

两个向量的和变换得到的向量是这两个向量变换得到的向量的和, 数 λ 与向量的数乘变换得到的向量是 λ 与该向量变换得到的向量的数乘.

像这样向量之间加法与数乘关系都不受影响的变换, 它与线性空间的运算相适应, 能够反映线性空间中向量的内在联系, 是线性空间的重要变换.

4.98

Example 69. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 求证 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从空间 \mathbb{C}^n 到空间 \mathbb{C}^m 的线性变换.

证明. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 故 $T: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从 \mathbb{C}^n 到 \mathbb{C}^m 的一个映射.

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C},$$

$$T(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2),$$

得证 $T: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从空间 \mathbb{C}^n 到空间 \mathbb{C}^m 的线性变换. □

4.99

Example 70. 积分运算是线性变换. 设 $J: C[a, b] \mapsto C[a, b]$, 且 J 定义为

$$J(f(x)) = \int_a^x f(t) dt,$$

因 $\forall f(x), g(x) \in C[a, b], \lambda \in \mathbb{R}$,

$$J(\lambda f(x) + g(x)) = \int_a^x (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt$$

$$= \lambda J(f(x)) + J(g(x)).$$

故 J 是 $C[a, b]$ 上的线性变换.

4.100

Example 71. 微分运算是线性变换. 记 $C^1[a, b]$ 表示在区间 $[a, b]$ 上可微函数所构成的线性空间. 设 $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, 且 D 定义为

$$D(f(x)) = f'(x).$$

因 $\forall f(x), g(x) \in C^1[a, b], \lambda \in \mathbb{R}$,

$$D(\lambda f(x) + g(x)) = \lambda f'(x) + g'(x) = \lambda D(f(x)) + D(g(x)),$$

故 D 是 $C^1[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的线性变换.

4.101

非线性变换的例子

Example 72. 设 T 定义为: $T(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 则 T 是由 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 到 \mathbb{R} 的一个映射, 但不是线性变换.

因为一般情况下, $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$.

Example 73. 共轭转置运算不是线性变换. 设 $T: \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$, 且 T 定义为

$$T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^H, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

取 $\lambda = i$, 因

$$\begin{aligned} T(i\mathbf{A}) &= (i\mathbf{A})^H = -i(\mathbf{A})^H \\ &\neq iT(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

4.102

Definition 74. 设 T 为从空间 X 到空间 X 的线性变换, 则称 T 为 X 上的线性变换.

Definition 75. 设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \rightarrow Y$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$ 为 零变换 (zero transformation), 记为 0^* . 即 $\forall \mathbf{x} \in X$, 有

$$0^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

4.103

Definition 76. 设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \rightarrow X$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ 为 X 上的 恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E . 即 $\forall \mathbf{x} \in X$, 恒有

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Definition 77. 设 X 为数域 F 上的线性空间, $\alpha \in F$ 为固定的数, 且 $\alpha \neq 0$. 称映射 $T: X \rightarrow X$, $\mathbf{x} \mapsto \alpha \mathbf{x}$ 为 X 上的 相似映射, 记为 α^* . 即 $\forall \mathbf{x} \in X$, 恒有

$$\alpha^*(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}.$$

相似映射也称为数乘变换. 当 $\alpha = 1$ 时, 便得恒等变换. 当 $\alpha = 0$ 时, 便得零变换.

恒等变换 E , 零变换 0^* 和相似变换 α^* 都是线性变换.

Theorem 78. 设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$, 右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i \in X$, 则 $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i T(\mathbf{x}_i)$.
3. 若 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组, 则 $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.
4. 若 $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_k)$ 为 Y 中线性无关的向量组, 则 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 为 X 中线性无关的向量组.

证明. (1) $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{x}) = 0T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

(2) 归纳法可得.

(3) 设存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, 由结论 (1), (2), 则

$$\lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \lambda_k T(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.$$

则 $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_k)$ 线性相关.

(4) 此命题为 (3) 的逆否命题.

但要注意, (3) 的逆命题是不对的, 线性变换可能把线性无关的向量组也变成线性相关的向量组. 比如零变换 0^* . \square

线性变换保持线性组合与线性关系式不变

(1) 如果 \mathbf{x} 是 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 的线性组合:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k,$$

那么经过线性变换 T 之后, $T(\mathbf{x})$ 是 $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_k)$ 同样的线性组合:

$$T(\mathbf{x}) = \lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \lambda_k T(\mathbf{x}_k).$$

(2) 如果 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 之间有一线性关系式

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

那么它们的像之间也有同样的关系

$$\lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \lambda_k T(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.$$

Exercise 79. 判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 \mathbf{x}_0 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 $T: X \rightarrow X, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \quad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \neq T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, 即此时 T 不是 X 上的线性变换. \square

(2) $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \boldsymbol{\xi} \mapsto \bar{\boldsymbol{\xi}}$.

解: T 不是线性变换. 因为取 $\lambda = i, \boldsymbol{\xi} = 1$ 时, 有

$$T(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \overline{\lambda\boldsymbol{\xi}} = -i, \quad \lambda T(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\bar{\boldsymbol{\xi}} = i.$$

故 $T(\lambda\boldsymbol{\xi}) \neq \lambda T(\boldsymbol{\xi})$. \square

4.107

(3) 把复数域 \mathbb{C} 看作实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 记为 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. 映射 $T: \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \boldsymbol{\xi} \mapsto i \operatorname{Re}\boldsymbol{\xi}$.

解: $\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) &= i \operatorname{Re}(\lambda\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \\ &= i \operatorname{Re}(\lambda\boldsymbol{\xi}) + i \operatorname{Re}\boldsymbol{\eta} \\ &= \lambda(i \operatorname{Re}\boldsymbol{\xi}) + i \operatorname{Re}\boldsymbol{\eta} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

故 T 是线性变换. \square

4.108

(4) 映射 $T: \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}, \boldsymbol{\xi} \mapsto \bar{\boldsymbol{\xi}}$.

解: T 是线性变换. $\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) &= \overline{\lambda\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}} \\ &= \lambda\bar{\boldsymbol{\xi}} + \bar{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

\square

4.109

(5) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \mapsto (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}}$.

解: T 是线性变换. $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) &= T((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) + T((y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}) \\ &= (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}} + (2y_1 - y_2, y_2 + y_3, y_1)^{\mathrm{T}} \\ &= (2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_1 + y_1))^{\mathrm{T}} \\ &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}). \\ T(\lambda\boldsymbol{x}) &= T((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^{\mathrm{T}}) \\ &= (2\lambda x_1 - \lambda x_2, \lambda x_2 + \lambda x_3, \lambda x_1)^{\mathrm{T}} \\ &= \lambda(2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}} = \lambda T(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

(6) $T: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{BZC}$, 其中 \mathbf{B}, \mathbf{C} 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 中固定的矩阵.

解: $\forall \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) &= \mathbf{B}(\lambda \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{C} \\ &= \lambda \mathbf{BZ}_1\mathbf{C} + \mathbf{BZ}_2\mathbf{C} \\ &= \lambda T(\mathbf{Z}_1) + T(\mathbf{Z}_2). \end{aligned}$$

故 T 是线性变换.

□

(7) $T: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$, $p(x) \mapsto p(x+1)$.

解: T 是线性变换. 设 $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 并令

$$r(x) \triangleq p(x) + q(x), \quad s(x) \triangleq \lambda p(x).$$

则 $r(x+1) = p(x+1) + q(x+1)$, $s(x+1) = \lambda p(x+1)$. 故

$$\begin{aligned} T(p(x) + q(x)) &= T(r(x)) = r(x+1) \\ &= p(x+1) + q(x+1) = T(p(x)) + T(q(x)), \\ T(\lambda p(x)) &= T(s(x)) = s(x+1) \\ &= \lambda p(x+1) = \lambda T(p(x)). \end{aligned}$$

□

6.2 线性变换的矩阵表示

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. 又设 $T: X \rightarrow Y$ 为给定的从 X 到 Y 的线性变换. 任取 X 和 Y 的基底分别为

$$\mathcal{B}_X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}, \quad \mathcal{B}_Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}.$$

则基底 \mathcal{B}_X 的像 $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_n)$ 可以由基底 \mathcal{B}_Y 线性表示:

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}_1) = a_{11}\mathbf{y}_1 + a_{21}\mathbf{y}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{y}_m, \\ T(\mathbf{x}_2) = a_{12}\mathbf{y}_1 + a_{22}\mathbf{y}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{y}_m, \\ \quad \vdots \\ T(\mathbf{x}_n) = a_{1n}\mathbf{y}_1 + a_{2n}\mathbf{y}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{y}_m, \end{cases}$$

即

$$[T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_n)] = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

记

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m \times n},$$

则

$$[T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \cdots, T(\mathbf{x}_n)] = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m]P. \quad (13)$$

若记

$$T[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n] \triangleq [T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \cdots, T(\mathbf{x}_n)],$$

则式 (13) 还可以表达为

$$T[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n] = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m]P,$$

或者

$$T\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y P. \quad (14)$$

Definition 80. 表达式 $T\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y P$ 中的矩阵 P 称为线性变换 T 的关于基底 \mathcal{B}_X 和基底 \mathcal{B}_Y 的矩阵表示, 记为

$$m_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}(T).$$

利用线性变换的矩阵可以直接计算一个向量的像.

Theorem 81. 设线性变换 $T: X \rightarrow Y$ 的关于基底 \mathcal{B}_X 和基底 \mathcal{B}_Y 的矩阵表示为 P , 向量 \mathbf{x} 在基底 \mathcal{B}_X 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 则 $T(\mathbf{x})$ 在基底 \mathcal{B}_Y 下的坐标 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 可以按下述公式计算:

$$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T = P(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

证: 记 $\mathcal{B}_X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$, $\mathcal{B}_Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m\}$.

由假设 $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$, 于是

$$T(\mathbf{x}) = a_1T(\mathbf{x}_1) + a_2T(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_nT(\mathbf{x}_n)$$

$$= [T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \cdots, T(\mathbf{x}_n)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m]P \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

另一方面, 由假设

$$T(\mathbf{x}) = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

因为向量 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$ 线性无关, 所以

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

□

☞ 线性空间中的向量可以用坐标来表示, 抽象的线性变换也能同具体的数发生联系: 用矩阵来表示.

4.117

线性变换的矩阵是与空间中的一组基底联系在一起的. 一般说来, 随着基底的改变, 同一个线性变换就有不同的矩阵. 为了利用矩阵来研究线性变换, 我们有必要弄清楚线性变换的矩阵是如何随着基底的改变而改变的.

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 \mathcal{B}_X 和 \mathcal{B}_Y 的矩阵为 \mathbf{P} , T 关于基底 $\mathcal{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathcal{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 \mathbf{P}_1 . 即

$$T\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y\mathbf{P}, \quad T\mathcal{B}_X^{(1)} = \mathcal{B}_Y^{(1)}\mathbf{P}_1.$$

又设有过渡矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 使得 $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_X^{(1)}\mathbf{A}$, $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_Y^{(1)}\mathbf{B}$. 下求 \mathbf{P} 与 \mathbf{P}_1 的关系.

$$\begin{aligned} T\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y\mathbf{P} &\Rightarrow T\mathcal{B}_X^{(1)}\mathbf{A} = \mathcal{B}_Y^{(1)}\mathbf{B}\mathbf{P}, \\ &\Rightarrow \mathcal{B}_Y^{(1)}\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathcal{B}_Y^{(1)}\mathbf{B}\mathbf{P}, \\ &\Rightarrow \mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{P}, \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}.$$

4.118

Theorem 82. 设 X 和 Y 为数域 F 上的线性空间, 则对给定的线性变换 $T: X \rightarrow Y$, 其关于 X 和 Y 的两组不同基底 $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ 和 $\mathcal{B}_X^{(1)}, \mathcal{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵表示 \mathbf{P} 和 \mathbf{P}_1 是相抵的, 即存在可逆矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 使

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}.$$

Corollary 83. 设 T 是线性空间 X 上的线性变换, 即 $T: X \rightarrow X$. 若 T 在两组基底

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \quad (15)$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, \quad (16)$$

下的矩阵表示分别为 \mathbf{P} 和 \mathbf{P}_1 , 且从基 $\mathcal{B}^{(1)}$ 到基 \mathcal{B} 的过渡矩阵为 \mathbf{A} , 则

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}.$$

即线性空间 X 上的线性变换在不同的基底下的矩阵表示是相似的.

Exercise 84. 已知 \mathbb{R}^3 中线性变换 T 在基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (0, 1, 1)^T$. 求 T 在自然基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的矩阵表示.

解: 已知

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]\mathbf{P}$$

设所求矩阵为 \mathbf{P}_1 , 即满足

$$T[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\mathbf{P}_1.$$

由

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \triangleq [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\mathbf{A},$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

或者不使用公式, 用下述表达方式.

已知

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]\mathbf{P}$$

代入

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$T[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}.$$

故

$$T[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

4.122

Exercise 85. 在 \mathbb{R}^3 中线性变换 T 定义如下:

$$T(-1, 0, 2)^T = (-5, 0, 3)^T,$$

$$T(0, 1, 1)^T = (0, -1, 6)^T,$$

$$T(3, -1, 0)^T = (-5, -1, 9)^T.$$

求 T 在自然基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的矩阵表示, 并求 $R(T)$ 及 $\dim R(T)$.

解: 记 $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (3, -1, 0)^T$. 由

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基底.

4.123

由题设

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

又

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} T[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.124

得 T 在基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 0,$$

知矩阵不满秩, 而列向量 $\alpha_1 = (-5, -4, 27)^T$, $\alpha_2 = (20, -5, 18)^T$ 不成比例, \mathbf{A} 的列向量的一个极大无关组为 α_1, α_2 , 故

$$R(\mathbf{A}) = \text{span}[\alpha_1, \alpha_2],$$

从而

$$R(T) = \text{span}[-5\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 27\mathbf{e}_3, 20\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 18\mathbf{e}_3].$$

且 $\dim R(T) = 2$. □

4.125

6.3 线性变换的运算

Definition 86. 设空间 X 和空间 Y 为数域 F 上的线性空间. T_1, T_2 都是从 X 到 Y 的映射, $\lambda \in F$, 若

1. 对任意 $\mathbf{x} \in X$ 均有 $T_1(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x})$, 则称 T_1 与 T_2 相等, 记为 $T_1 = T_2$.
2. 对任意 $\mathbf{x} \in X$ 均有 $T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$, 则称 T 为 T_1 与 T_2 的和, 记为 $T = T_1 + T_2$.
3. 对任意 $\mathbf{x} \in X$ 均有 $T(\mathbf{x}) = \lambda(T_1(\mathbf{x}))$, 则称 T 为 T_1 与 λ 的标量乘积, 记为 $T = \lambda T_1$.

 若 T_1 与 T_2 为线性变换, 则 $T_1 + T_2$ 及 λT_1 仍是线性变换.

4.126


Theorem 87. 设 $L(X, Y)$ 为从 X 到 Y 的所有线性变换所构成的集合, 则 $L(X, Y)$ 按照定义 86 中的加法与标量乘法构成数域 F 上的一个线性空间, 称为 X, Y 所诱导的变换空间.

4.127

Definition 88. 设 $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, 若线性变换 $G \in L(X, Z)$ 对任意 $\mathbf{x} \in X$ 都满足

$$G(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})),$$

则称 G 为 T 与 S 的积, 并记为 ST , 即 $G = ST$.

 线性变换的乘积一般是不可交换的. 即 $TS = ST$ 一般不成立. 例如下面的习题.

4.128

Exercise 89. 设 T, S 为线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的如下的两个线性变换:

$$Tp(x) = p'(x), \quad Sp(x) = xp(x).$$

试问等式 $TS = ST$ 是否成立? 并证明 $TS - ST = E$.

解: (1) 因为

$$\begin{aligned}(TS)p(x) &= T(Sp(x)) = T(xp(x)) = p(x) + xp'(x), \\(ST)p(x) &= S(Tp(x)) = S(p'(x)) = xp'(x),\end{aligned}$$

可见 $p(x) \neq 0$ 时, $(TS)p(x) \neq (ST)p(x)$, 故

$$TS \neq ST.$$

4.129

(2) 由上述讨论知, 对任意 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, 有

$$(TS)p(x) = p(x) + (ST)p(x),$$

即

$$(TS - ST)p(x) = p(x),$$

故 $TS - ST = E$. □

4.130

Definition 90. 设 $T \in L(X, X)$, 则称 TT 为 T 的平方, 并记为 $T^2 = TT$. 一般地, 以下述递推式来表示 T 的 k 次方 ($k \geq 0$):

$$\begin{cases} T^0 = E, \\ T^k = T(T^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (17)$$

若 T 是可逆变换, 则上式中的 k 可以取任何整数.

☞ 可逆变换: 设 T, S 为空间 X 上的变换, 若

$$TS = ST = E,$$

则称 S 为 T 的逆变换, 记为 T^{-1} .

比如取 $k = -2$, 则 $T^{-2} = T(T^{-3})$.

4.131

Definition 91. 设 X 为数域 F 上的线性空间, $T \in L(X, X)$, 又设 $g(\lambda)$ 为关于 λ 的多项式, 其系数属于 F , 即

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_m\lambda^m,$$

则表达式

$$g(T) = \alpha_0 E + \alpha_1 T + \dots + \alpha_m T^m,$$

称为线性变换 T 的多项式.

4.132

Exercise 92. 设 $T, S \in L(X, X)$, 并且 $TS - ST = E$, 试证 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$.

证明. 对 m 用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 即 $TS - ST = T^0 = E$, 由题设成立.

假定等式对 m 成立, 即有 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$. 下面证明等式对 $m + 1$ 也成立.

$$\begin{aligned} T^{m+1}S - ST^{m+1} &= T^m(TS) - ST^{m+1} \\ &= T^m(E + ST) - ST^{m+1} = T^m + T^mST - ST^{m+1} \\ &= T^m + (T^mS - ST^m)T = T^m + (mT^{m-1})T = (m + 1)T^{m+1}, \end{aligned}$$

即等式对 $m + 1$ 也成立. 从而对任意正整数都成立. \square

4.133

6.4 线性变换的像 (值域) 与核

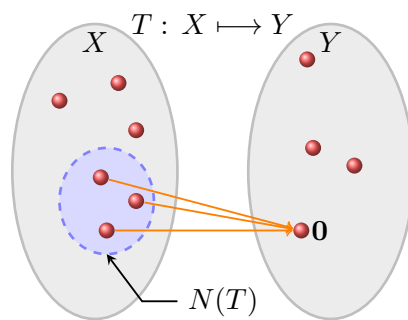
线性变换的值域与核

Definition 93. 给定线性变换 $T: X \rightarrow Y$, 记

$$\begin{aligned} R(T) &= \{\mathbf{y} \in Y \mid \mathbf{y} = T(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}, \\ N(T) &= \{\mathbf{x} \in X \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}, \end{aligned}$$

则 $R(T)$ 称为 T 的值空间 (或值域); $N(T)$ 称为 T 的零空间 (或核).

4.134



4.135

Example 94. 证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \mathbf{y}_1 = T(\mathbf{x}_1), \mathbf{y}_2 = T(\mathbf{x}_2) \in R(T), \forall k \in F$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 &= T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in R(T), \\ k\mathbf{y}_1 &= kT(\mathbf{x}_1) = T(k\mathbf{x}_1) \in R(T). \end{aligned}$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

(2) $N(T)$ 是 X 的非空子集. 下证 $N(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in N(T)$, 有 $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}, T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, 则

$$T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

得 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in N(T)$. 又 $\forall \lambda \in F$, 有

$$T(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0},$$

得 $\lambda\mathbf{x}_1 \in N(T)$. 故 $N(T)$ 是 X 的一个子空间. \square

4.136

Example 95. 在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中, 令

$$T(p(x)) = p'(x).$$

则 T 的值域就是 $\mathbb{R}[x]_{n-1}$, T 的核就是子空间 \mathbb{R} .

4.137

Theorem 96. 设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}.$$

则 $T(\mathbf{x}_1) = \dots = T(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n\}$.

$\forall \mathbf{y} \in R(T)$, $\exists \mathbf{x} \in X$, 满足 $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$. 设 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) &= T(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_{k+1} T(\mathbf{x}_{k+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n), \end{aligned}$$

由 \mathbf{y} 的任意性, 下证 $T(\mathbf{x}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{x}_n)$ 线性无关, 从而是 $R(T)$ 的一组基底, 则 $\dim R(T) = n - k$, 得到 $\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X$.

4.138

设有 $\xi_{k+1} T(\mathbf{x}_{k+1}) + \dots + \xi_n T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \xi_n \mathbf{x}_n) = \mathbf{0},$$

从而 $\xi_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \xi_n \mathbf{x}_n \in N(T)$. 故可设

$$\xi_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \xi_n \mathbf{x}_n = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k,$$

即

$$-\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \dots - \lambda_k \mathbf{x}_k + \xi_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \xi_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$


而 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ 为 X 的基底, 故

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \xi_{k+1} = \dots = \xi_n = 0.$$

故 $T(\mathbf{x}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{x}_n)$ 线性无关. \square

4.139

Definition 97. 给定线性变换 $T: X \rightarrow Y$, 则称 $R(T)$ 的维数为 T 的秩, 记为 $\text{rank}(T)$. 又称 $N(T)$ 的维数为 T 的零度, 记为 $\text{null}(T)$.

 前述定理的结论也可以表达为

$$\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim X.$$

4.140

7 习题

Exercise 98 (习题 1). 证明: $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^T$ 是 \mathbb{R}^4 的一组基, 并求 $\beta = (1, 2, 1, 1)^T$ 在这组基下的坐标.

解:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(r_1+r_2+r_3+r_4)/4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{r_i-r_1 \\ i=2,3,4}]{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right)} \xrightarrow[\substack{(r_3+r_2)/(-2) \\ (r_4+r_2)/(-2)}]{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right)} \\ & \xrightarrow[\substack{r_2+r_3+r_4 \\ r_3 \leftrightarrow r_4}]{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right)}, \end{aligned}$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 \mathbb{R}^4 的一组基, 且 β 在这组基下的坐标为 $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T$.

4.141

4.142

Exercise 99 (习题 2). 已知 \mathbb{R}^3 的两组基为

$$\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 3, 3)^T, \alpha_3 = (3, 7, 1)^T;$$

$$\beta_1 = (3, 1, 4)^T, \beta_2 = (5, 2, 1)^T, \beta_3 = (1, 1, -6)^T.$$

求:

(1) 向量 $\gamma = (3, 6, 2)^T$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的坐标;

(2) 基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的过渡矩阵;

(3) 用公式 (4.7) 求 γ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标.

解: (1) 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \gamma$, 解方程组:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)} \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{r_i \times (-1) \\ i=2,3}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)} \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_1-3r_3}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)} \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

故向量 $\gamma = (3, 6, 2)^T$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的坐标为 $(-2, 1, 1)^T$.

4.143

(2) 设所求的过渡矩阵为 P , 即有 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 那么 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 由

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[i=2,3]{r_i \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array} \right), \end{aligned}$$

故所求过渡矩阵为 $P = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

4.144

(3) 向量 $\gamma = (3, 6, 2)^T$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.145

因为

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} -27 & -71 & -41 & -2 \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 4 & 12 & 8 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \div 4]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & -14 & 1 \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \times 7]{r_2-9r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 & -9 & -\frac{5}{4} \\ 0 & -77 & -98 & 7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_3-11r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 & -9 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array} \right) \xrightarrow[r_2+9r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{165}{4} \\ 0 & -7 & 0 & \frac{742}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_2 \div (-7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{165}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{106}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{153}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{106}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以向量 $\gamma = (3, 6, 2)^T$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标为 $(\frac{153}{4}, -\frac{106}{4}, \frac{83}{4})^T$.

4.146

Exercise 100 (习题 3). 已知 \mathbb{R}^4 的两组基为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, 2, 1, 1)^T, \alpha_4 = (-1, -1, 0, 1)^T; \\ \beta_1 &= (2, 1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, 2, 2)^T, \beta_3 = (-2, 1, 1, 2)^T, \beta_4 = (1, 3, 1, 2)^T. \end{aligned}$$

- (1) 求基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 γ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为 $(1, 0, 0, 0)^T$, 求 γ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标;
- (2) 求基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 到基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 ξ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, 0)^T$, 求 ξ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标;
- (3) 已知向量 α 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, 0)$, 求它在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标.

解: 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.

(1) 设所求过渡矩阵为 P , 即有 $B = AP$, 从而 $P = A^{-1}B$.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4-7r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[r_3-\frac{3}{2}r_4]{r_1+r_4, r_2-r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2-r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

即从基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $x = (1, 0, 0, 0)^T$, 设 γ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标为 y . 则

$$Ax = By.$$

又 $B = AP$, 得 $Ax = APy$, 从而 $x = Py$, 故 $y = P^{-1}x$.

由

$$(P, x) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2-r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

故 γ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标为: $(0, -1, 0, 1)^T$.

(2) 设所求过渡矩阵为 Q , 即有 $A = BQ$, 从而 $Q = B^{-1}A$, 于是 $Q = P^{-1}$. 下面求 P^{-1} .

4.150

$$\begin{aligned} (P, I) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3-r_2-r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

4.151

即

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

向量 ξ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.152

(3) 当向量 α 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, 0)^T$ 时, 它在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4.153

Exercise 101 (习题 4). 在 \mathbb{R}^4 中找一个向量 γ , 使它在自然基 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$ 和基 $\beta_1 = (2, 1, -1, 1)^T$, $\beta_2 = (0, 3, 1, 0)^T$, $\beta_3 = (5, 3, 2, 1)^T$, $\beta_4 = (6, 6, 1, 3)^T$ 下有相同的坐标.

解: 设向量 γ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则有

$$x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + x_3\epsilon_3 + x_4\epsilon_4 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4$$

即

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4.$$

得

$$\begin{cases} 2x_1 & + 5x_3 + 6x_4 = x_1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = x_2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = x_3, \\ x_1 & + x_3 + 3x_4 = x_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 & + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1, r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \div (-4)]{r_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3 \div 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

取 $x_4 = k$, 得方程组得通解为:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-k, -k, -k, k)^T \quad (k \in \mathbb{R}).$$

即所求向量为:

$$\gamma = (-k, -k, -k, k)^T \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Exercise 102 (习题 5). 已知 $\alpha = (1, 2, -1, 1)$, $\beta = (2, 3, 1, -1)$, $\gamma = (-1, -1, -2, 2)$.

- (1) 求 α, β, γ 的长度及 $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle$;
- (2) 求与 α, β, γ 都正交的所有向量.

解: (1)

$$\|\alpha\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7},$$

$$\|\beta\| = \sqrt{4 + 9 + 1 + 1} = \sqrt{15},$$

$$\|\gamma\| = \sqrt{1 + 1 + 4 + 4} = \sqrt{10}.$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} = \arccos \frac{2+6-1-1}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{15}} = \arccos \frac{2\sqrt{105}}{21}.$$

$$\langle \alpha, \gamma \rangle = \arccos \frac{\alpha \cdot \gamma}{\|\alpha\| \cdot \|\gamma\|} = \arccos \frac{-1-2+2+2}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{10}} = \arccos \frac{\sqrt{70}}{70}.$$

(2) 设与 α, β, γ 都正交的向量为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, 则有 $(\alpha, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\beta, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\gamma, \boldsymbol{x}) = 0$. 即

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

解此方程组:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 + 5x_4, \\ x_2 = 3x_3 - 3x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

于是与 α, β, γ 都正交的所有向量为

$$(-5k_1 + 5k_2, 3k_1 - 3k_2, k_1, k_2).$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

Exercise 103 (习题 6). 求与 $(1, 1, -1, 1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(2, 1, 1, 3)$ 都正交的单位向量.

解: 设所求向量为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解此方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{(r_2-r_1)/(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2} \\ \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -3x_3. \end{cases}$$

得方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (4, 0, 1, -3)^T,$$

故所求单位向量为

$$\pm \frac{1}{\sqrt{26}} (4, 0, 1, -3).$$

4.159

4.160

Exercise 104 (习题 7). 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合, 注意到

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

则

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2) + \dots + k_m(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

结论成立.

Exercise 105 (习题 10). 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 证明 $\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 也是 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基.

证: 设 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$. 由题设可知: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, 且

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

因为

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T \mathbf{A} \cdot \frac{1}{3} \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.161

4.162

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = I.$$

所以 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 也是 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基.

4.163

Exercise 106 (习题 11). 已知 $Q = \begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e

的值.

解: 第 1 行: $a^2 + \frac{9}{49} + \frac{4}{49} = 1$, 故 $a = \pm \frac{6}{7}$.

第 3 行: $\frac{9}{49} + \frac{4}{49} + e^2 = 1$, 故 $e = \pm \frac{6}{7}$.

此两行正交: $-\frac{3}{7}a - \frac{6}{49} + \frac{2}{7}e = 0$,

(1) 将 $a = \frac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e = \frac{12}{7}$, 这与 $e = \pm \frac{6}{7}$ 矛盾, 故舍去.

(2) 将 $a = -\frac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e = -\frac{6}{7}$.

故

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Q 的各列为单位向量, 故

4.164

$$b = \pm \frac{2}{7}, \quad c = \pm \frac{6}{7}, \quad d = \pm \frac{3}{7}.$$

由各列两两正交, 故

- $b = \frac{2}{7}$ 时, $c = -\frac{6}{7}, d = -\frac{3}{7}$;

- $b = -\frac{2}{7}$ 时, $c = \frac{6}{7}, d = \frac{3}{7}$.

故所求的值有两组:

$$(a, b, c, d, e) = \left(-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right).$$

4.165

Exercise 107 (习题 12). 证明: 若 A 是正交阵, 则 A 的伴随矩阵 A^* 也是正交矩阵.

证: 因为 A 是正交矩阵, 所以

$$A^T A = I, \quad A A^T = I,$$

且

$$|A|^2 = |A^T| |A| = |A^T A| = |I| = 1.$$

而 $A^* = |A| A^{-1}$, 于是

$$(A^*)^T A^* = (|A| A^{-1})^T |A| A^{-1} = |A|^2 (A A^T)^{-1} = I^{-1} = I.$$

故 A^* 也是正交矩阵.

4.166

Exercise 108 (习题 21). 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数及解空间的一组标准正交基.

分析: 齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数就是其基础解系中解向量的个数, 并且基础解系就是解空间的一组基, 因此本题就是要求齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 再将其标准正交化.

解:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

选取 x_1, x_5 为自由未知量, 得同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -x_1 - x_5, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -x_1 + 4x_5, \\ x_5 = x_5, \end{cases}$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -1, 0, -1, 0)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0, -1, 0, 4, 1)^T.$$

故解空间的维数为 2.

将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 正交化得: $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1)} \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

综上: 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数为 2, 解空间的一组标准正交基为 $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, -1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, 0, 3, 1)^T$.

Exercise 109 (习题 22). 设 V 是 \mathbb{R}^5 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 1, 1)$, 试将 V 的基扩充为 \mathbb{R}^5 的基.

分析: 与 α_1, α_2 正交的向量一定与 α_1, α_2 线性无关.

解: 设向量 \mathbf{x} 满足 $(\alpha_1, \mathbf{x}) = 0, (\alpha_2, \mathbf{x}) = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 = -x_2 - x_4 - x_5. \end{cases}$$

方程组的基础解系为:

$$\xi_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)^T, \xi_2 = (-1, 0, 0, 1, 0)^T, \xi_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)^T.$$

于是得到 \mathbb{R}^5 的一组基为: $(1, 1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1, 1)^T, (-1, 1, 0, 0, 0)^T, (-1, 0, 0, 1, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 1)^T$.

另解:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_1+r_i} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是得到 \mathbb{R}^5 的一组基为:

$$(1, 1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1, 1)^T, (0, 1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Exercise 110 (习题 27). 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 α_{n+1} 在这组基下的坐标 (x_1, x_2, \dots, x_n) 全不为零. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 α_1 在基 $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若这 n 个向量中不包含 α_{n+1} , 那么结论显然成立; 若这 n 个向量中包含 α_{n+1} , 不妨考虑 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. 设

$$k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n + k_{n+1}\alpha_{n+1} = \mathbf{0},$$

代入 $\alpha_{n+1} = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$, 则有

$$k_{n+1}x_1\alpha_1 + (k_{n+1}x_2 + k_2)\alpha_2 + \dots + (k_{n+1}x_n + k_n)\alpha_n = \mathbf{0}.$$

注意到 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 所以

4.172

$$\begin{cases} k_{n+1}x_1 = 0, \\ k_{n+1}x_2 + k_2 = 0, \\ \vdots \\ k_{n+1}x_n + k_n = 0. \end{cases}$$

因为 $x_i \neq 0$, 所以 $k_2 = k_3 = \dots = k_{n+1} = 0$. 故结论成立.

4.173

设 α_1 在基 $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(y_2, y_3, \dots, y_n, y_{n+1})^T$. 即有

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + \dots + y_n\alpha_n + y_{n+1}\alpha_{n+1} \\ &= y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + \dots + y_n\alpha_n + y_{n+1}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n) \\ &= (x_1y_{n+1})\alpha_1 + (y_2 + x_2y_{n+1})\alpha_2 + \dots + (y_n + x_ny_{n+1})\alpha_n. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{cases} x_1y_{n+1} = 1, \\ y_2 + x_2y_{n+1} = 0, \\ \vdots \\ y_n + x_ny_{n+1} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = \frac{1}{x_1}, \\ y_2 = -\frac{x_2}{x_1}, \\ \vdots \\ y_n = -\frac{x_n}{x_1}. \end{cases}$$

故 α_1 在基 $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(-\frac{x_2}{x_1}, \dots, -\frac{x_n}{x_1}, \frac{1}{x_1})^T$.

4.174

另解: 由

$$(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{pmatrix},$$

上式右端矩阵记为 A , 矩阵 A 可逆, 知向量组 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 等价, 从而向量组 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 线性无关.

又

$$\alpha_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1})\mathbf{y} \\
&= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\mathbf{A}\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

故 $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

4.175

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & | & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & | & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & | & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{相邻互换}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & | & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & | & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & | & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{r_n \div x_1} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & | & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & | & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix} & \xrightarrow{r_i - x_{i+1}r_n} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & -\frac{x_2}{x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & -\frac{x_3}{x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & -\frac{x_n}{x_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix},
\end{array}$$

故所求坐标为 $(-\frac{x_2}{x_1}, -\frac{x_3}{x_1}, \cdots, -\frac{x_n}{x_1}, \frac{1}{x_1})^T$.

□

4.176

Example 111 (习题 51). 设 \mathbf{A} 为正交矩阵, $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ 可逆, 证明:

- (1) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$ 可交换;
- (2) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}),$$

所以

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}),$$

从而

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}.$$

故 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$ 可交换.

4.177

(2) 因为 \mathbf{A} 为正交矩阵, 所以 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, 从而

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}]^T &= [(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}]^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})^T \\
&= [(\mathbf{I} + \mathbf{A})^T]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^T \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^T) \\
&= [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} + \mathbf{I})]^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \\
&= -(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\
&= -(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}.
\end{aligned}$$

故 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

□

4.178

即

$$(\alpha_i, \sum_{j=1}^m k_j \alpha_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^m k_i (\alpha_i, \sum_{j=1}^m k_j \alpha_j) = (\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i, \sum_{j=1}^m k_j \alpha_j) = (\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i, \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i) = 0$$

亦即 $\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i = \mathbf{0}$, 这与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关矛盾, 故结论成立.