Chapter 6

二次型

Linear Algebra

December 8, 2016

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

6.1

目录

6.2

1 二次型的定义和矩阵表示 合同矩阵

所谓二次型就是形如

$$4x^2-3xy+5y^2,\quad 3x_1^2+2x_2^2-x_3^2+x_1x_2-5x_2x_3$$

的二次齐次函数.

本章的主题: 二次型化为标准形.

把二次型化为标准形, 可以方便地研究其性质. 例如中心是原点的二次曲线

$$x^2-xy+y^2=4.$$

让曲线绕原点旋转适当角度, 令

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

可以使它化为标准形

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{\frac{8}{3}} = 1,$$

6.3

从这个标准形, 我们容易识别曲线的类别, 研究曲线的性质. 为使曲线在旋转过程中保持形状不变, 要求使用正交变换.

不使用正交变换, 也可以把二次型 $x^2 - xy + y^2$ 标准化.

比如, 由

$$x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2,$$

令 $x' = (x - \frac{1}{2}y)$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y$, 得

$$x'^2 + y'^2 = 4.$$

很显然, 这种非正交的变换, 改变了曲线的形状. 6.4

如何用矩阵的形式表达二次齐次多项式

例如,

$$f = x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4xy + 2yz + 6xz.$$

可以记为

$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

或

$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

甚至

$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

6.5

为了保持唯一性, 约定矩阵为对称矩阵. 使得

$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

一般地, 一个包含 n 个变量的二次齐次多项式总可以表达为:

$$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$. 6.6

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则一个二次齐次多项式一般地可以用矩阵表达为

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 6.7

展开

$$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{aligned} f=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots\cdots \\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

注意到 $a_{ij}=a_{ji}$, 得 6.8

$$\begin{aligned} f=\ & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ & \qquad\quad +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Definition 1. 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f=\ & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ & \qquad\quad +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a_{nn}x_n^2, \end{aligned} \tag{1}$$

称为二次型 (Quadratic form).

本章主要问题: 寻求可逆的线性变换 6.9

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \quad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2}$$

使二次型只含平方项. 即用 (2) 代入 (1), 能使

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2,$$

这种只含平方项的二次型, 称为二次型的标准形.

如果标准形的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 只在 $1, -1, 0$ 三个数中取值, 也就是用 (2) 代入 (1), 能使

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

则称上式为二次型的规范形. 6.10

由二次型的记法

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

可见: 任给一个二次型, 就唯一地确定一个对称阵; 反之, 任给一个对称阵, 也可唯一地确定一个二次型.

二次型与对称阵之间存在一一对应的关系.

Definition 2.
- 把对称阵 $\boldsymbol{A}$ 叫做二次型 f 的矩阵;
- 把 f 叫做对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型;
- 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 就叫做二次型 f 的秩.

6.11

记 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, 把可逆变换 (2) 记作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

代入 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 有

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}.$$

Definition 3. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 若有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 记为

$$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}.$$

☞ 注意到 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 故合同关系是相抵关系的一种. 6.12

2 化二次型为标准形

要使二次型 f 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 变成标准形, 即要使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}&=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2\\&=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

也就是要使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角阵.

故问题转化为: 对于对称阵 $\boldsymbol{A}$, 寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角阵.

这个问题称为把对角阵 $\boldsymbol{A}$ 合同对角化.

解决方法: 任给对称阵 $\boldsymbol{A}$, 总有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 即

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

6.13

2.1 正交变换法

Theorem 4. 任给二次型 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$, 总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

6.14

Example 5. 用正交变换法, 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形.

解: 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$, 其特征多项式

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\\-2&\lambda-1&4\\2&\lambda-1&\lambda-5\end{vmatrix}\\&\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\\-2&\lambda-1&4\\4&0&\lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10).\end{aligned}$$

6.15

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

得同解方程组 $x_1 + 2x_2 - 2x_2 = 0$. 取其一个解为

$$\boldsymbol{x}_1 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$

则另一个与之正交的解可取为

$$\boldsymbol{x}_2 = (-4, 1, -1)^{\mathrm{T}},$$

对 $\lambda_3 = 10$, 解方程组 $(10\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$10\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 4r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 18 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}_3 = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$. 6.16

将 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2 = (-\frac{4\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^{\mathrm{T}},$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1, 1, 10)$.

令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, 作正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 原二次型就化为标准形

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

6.17

2.2 配方法和初等变换法

一、配方法

Example 6. 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

成标准形, 并求所用的变换矩阵.

解: 把含 x_1 的项归并起来, 配方可得

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2. \end{aligned}$$

6.18

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3, \\ y_3 = \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3, \end{cases} \qquad \text{即} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = \phantom{y_1 - {}} y_2 - 2y_3, \\ x_3 = \phantom{y_1 - y_2 + {}} y_3, \end{cases}$$

则得到 f 的标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2,$$

所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.19

Example 7. 化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成规范形, 并求所用的变换矩阵.

解: 在 f 中不含平方项. 由于含有 x_1x_2 乘积项, 故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

代入可得

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

再配方, 得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

6.20

令

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}(y_1 - y_3), \\ z_2 = \sqrt{2}(y_2 - 2y_3), \\ z_3 = \sqrt{6}y_3, \end{cases} \qquad \text{即} \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_3, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_3, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}z_3, \end{cases}$$

则得到 f 的标准形

$$f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2,$$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

6.21

Example 8. 用配方法化二次型 $f=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 为标准形.

解: 令

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2,\\ y_2=x_2-x_3,\\ y_3=x_3+x_1,\end{cases}$$

得 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

但该解法是错误的. 因为

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad \text{而}\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

故上述不是可逆的线性变换. 正确解法: 6.22

$$\begin{aligned} f&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3\\ &=2(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3)+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3\\ &=2[x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2]-\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3\\ &=2[x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)]^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3\\ &=2[x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)]^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3),\\ y_2=x_2-x_3,\\ y_3=x_3,\end{cases}\qquad \text{即}\qquad \begin{cases} x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2-y_3,\\ x_2=y_2+y_3,\\ x_3=y_3,\end{cases}$$

得标准形为 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$. □ 6.23

二、初等变换法

初等变换法是基于以下的事实.

Theorem 9. 任意实对称矩阵可以用某些同样类型的行、列初等变换化为对角形.

Example 10. 用同样的行、列初等变换把对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

化为对角形.

6.24

解: 因为主对角线上元都是 0 而第 1 行第 2 列上元不是 0, 令 r_1+r_2, 同时令 c_1+c_2, 得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

它仍然是对称矩阵.

令 $r_2-\frac{1}{2}r_1$, r_3+r_1, 同时进行相同的列变换 $c_2-\frac{1}{2}c_1$, c_3+c_1, 得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

右下角矩阵也是对称阵, 可以用上面同样的方法简化. 6.25

令 r_3-4r_2, 同时 c_3-4c_2 得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

这就是所求的对角矩阵. □

前述的定理也可以这样来证明. 一般情况也是这样, 与此例并无原则差别. 6.26

换一个表达方式就是下面的定理.

Theorem 11. *对任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得*

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

☞ 这里 $\boldsymbol{C}$ 不一定是正交矩阵. $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 也不一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 6.27

事实上, 记 $\boldsymbol{P}_i$ 为某初等矩阵, 则

$$\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i$$

意味着对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行同样类型的行、列初等变换.

例如, 设 $\boldsymbol{P}_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \alpha & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{P}_i$ 出现在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧, 意味着对 $\boldsymbol{A}$ 实施列变换 $c_3+\alpha c_1$.

$\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}$ 出现在 $\boldsymbol{A}$ 的左侧, 意味着对 $\boldsymbol{A}$ 实施行变换 $r_3+\alpha r_1$. 6.28

故对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施一系列同样类型的行、列初等变换, 可以表达为

$$\boldsymbol{P}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k.$$

记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k$, 上式即

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

6.29

如何得到 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k$?

方法:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{同时只对 }\boldsymbol{A}\text{ 进行同类型的初等行变换}]{\text{整体进行初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

6.30

Example 12. 试用初等变换法把上例中的 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$ 化为对角形矩阵, 并求所需用的矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 根据上例, 我们得到

$$\left(\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc}2&1&-2\\1&0&-3\\-2&-3&0\\ \hdashline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

6.31

$$\xrightarrow[c_2-\frac{1}{2}c_1,c_3+c_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1,r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3-4c_2]{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{array}\right).$$

故

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

6.32

Exercise 13 (习题 11)**.** 用初等变换法将下列二次型化为标准形, 并求相应的坐标变换.

(1) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

(2) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

(3) $x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-x_4^2+6x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_4-8x_3x_4$.

6.33

解: (1) $\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{I}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc}1&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&0\\ \hdashline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[c_2-\frac{1}{2}c_1,c_3-c_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1,r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2\times 2]{r_2\times 2}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \hdashline 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

即通过坐标变换 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，可将二次型化为标准形 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 6.34

(2) $$\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{I}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2-c_1,c_3-2c_1]{r_2-r_1,r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -1 & -3\\ \hdashline 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_3-\frac{1}{3}c_2]{r_3-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{8}{3}\\ \hdashline 1 & -1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

即通过坐标变换 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，可将二次型化为标准形 $y_1^2-3y_2^2-\dfrac{8}{3}y_3^2$. 6.35

(3) $$\left(\begin{array}{cccc}1 & 3 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 0 & -2\\ -2 & 0 & 4 & -4\\ 0 & -2 & -4 & -1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2-3c_1,c_3+2c_1]{r_2-3r_1,r_3+2r_1}\left(\begin{array}{cccc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 6 & -2\\ 0 & 6 & 0 & -4\\ 0 & -2 & -4 & -1\\ \hdashline 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_3+\frac{3}{2}c_2]{r_3+\frac{3}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & -1 \\ \hdashline 1 & -3 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[c_4-\frac{1}{2}c_2]{r_4-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ \hdashline 1 & -3 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ 6.36

$$\xrightarrow[c_4+\frac{7}{9}c_3]{r_4+\frac{7}{9}r_3}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{9} \\ \hdashline 1 & -3 & -\frac{5}{2} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

即通过坐标变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -\frac{5}{2} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 可将二次型化为标准形 $y_1^2 - 4y_2^2 + 9y_3^2 - \dfrac{49}{9}y_4^2$. 6.37

Exercise 14 (习题 12)**.** 设 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, 问: 对角矩阵的对角元是否都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值? 并说明理由.

解: 不一定.

如果 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵, 那么 d_i 就为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 否则 d_i 就不一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 6.38

3 惯性定理和二次型的规范形

二次型的标准形显然不是唯一的, 只是标准形中所含项数是确定的 (即是二次型的秩).

在限定变换为实变换时, 标准形中正系数的个数是不变的 (从而负系数的个数也不变).

Theorem 15 (惯性定理)**.** *设有二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 它的秩为 r, 有两个可逆变换*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \qquad \text{及} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$$

使

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2 \qquad (k_i \neq 0),$$

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.

证明略.

6.39

Definition 16. 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形中,

- 正系数的个数, 称为二次型 (或 $\boldsymbol{A}$) 的正惯性指数;
- 负系数的个数, 称为二次型 (或 $\boldsymbol{A}$) 的负惯性指数;
- 正、负惯性指数的差, 称为符号差.

若二次型 f 的正惯性指数为 p, 秩为 r, 则 f 的规范形为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

Corollary 17. *设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q, 则*

$$\boldsymbol{A} \simeq \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0).$$

其中 1 有 p 个, -1 有 q 个.

6.40

4 正定二次型和正定矩阵

Definition 18. 设有二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,

- 如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$ (显然 $f(\boldsymbol{0}) = 0$), 则称 f 为正定二次型, 并称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.
- 如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) < 0$, 则称 f 为负定二次型, 并称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的.

6.41

Theorem 19. *$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型 (或 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵) 的充要条件是下列任何之一:*

(1) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n, 即 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{I}$.

(2) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为正.

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式全为正, 即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

6.42

Theorem 20. *对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定的充要条件是: 奇数阶顺序主子式为负, 而偶数阶顺序主子式为正, 即*

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

Example 21. 判定二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性. 6.43

解: f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

因

$$a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,\quad |\boldsymbol{A}|=-80<0,$$

故 f 为负定的. □ 6.44

Example 22. 证明: 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

证: 取正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 使 f 成为标准形, 即

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又正交变换保持向量的长度不变, 即

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{y}\|^2,$$

所以, 当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 有 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\|\boldsymbol{y}\|^2=1$. 记 $\lambda_i=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 6.45
则

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_iy_1^2+\lambda_iy_2^2+\cdots+\lambda_iy_n^2=\lambda_i(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_i.$$

而且, 当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 时, $f=\lambda_i$. 故得证

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}f=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$

6.46

5 其他有定二次型

Definition 23. 对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,

(1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant0$, 但至少存在一个 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$, 就称 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是半正定二次型, $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵.

(2) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$, 称 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是负定二次型, $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵.

(3) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant0$, 但至少存在一个 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$, 就称 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是半负定二次型, $\boldsymbol{A}$ 是半负定矩阵.

正定和半正定, 以及负定和半负定二次型, 统称为有定二次型. 如果二次型不是有定的, 就称为不定二次型.

显然, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定 (半正定) 矩阵, 则 $-\boldsymbol{A}$ 是负定 (半负定) 矩阵. 反之亦然. 6.47

Theorem 24. *设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 则下列命题等价:*

(i) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *负定;*

(ii) $\boldsymbol{A}$ *的负惯性指数为 n, 即 $\boldsymbol{A} \simeq -\boldsymbol{I}$.*

(iii) *存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.*

(iv) $\boldsymbol{A}$ *的 n 个特征值全为负.*

(v) $\boldsymbol{A}$ *的奇数阶顺序主子式为负, 而偶数阶顺序主子式为正.* 6.48

Theorem 25. *设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 则下列命题等价:*

(i) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *半正定;*

(ii) $\boldsymbol{A}$ *的正惯性指数小于 n.*

(iii) *存在降秩矩阵 $\boldsymbol{P}$ (即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}) < n$), 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.*

(iv) $\boldsymbol{A}$ *的 n 个特征值全为非负, 但至少有一个等于 0.*

(v) $\boldsymbol{A}$ *的各阶主子式非负, 且至少有一个主子式等于 0.* 6.49

6 习题

Exercise 26 (习题 9)**.** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & & & \\ -2 & 1 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -4 & 6 \\ & & & 6 & 1 \end{pmatrix}$, 试求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

解:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & & & \\ -2 & 1-\lambda & & & \\ & & 5-\lambda & & \\ & & & -4-\lambda & 6 \\ & & & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= [(4-\lambda)(1-\lambda) - 4](5-\lambda)[(-4-\lambda)(1-\lambda) - 36] \\
&= \lambda(\lambda - 5)(5-\lambda)(\lambda + 8)(\lambda - 5).
\end{aligned}
$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -8$, $\lambda_3 = 5$ (三重). 6.50

对 $\lambda_1 = 0$, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & & & \\ -2 & 1 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -4 & 6 \\ & & & 6 & 1 \end{pmatrix},
$$

因 $\lambda_1 = 0$ 是单根, 知方程组只有一个线性无关的解. 而

$$(1,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

显然是其解.

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 6.51

对特征值 $\lambda_2 = -8$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 12 & -2 & & & \\ -2 & 9 & & & \\ & & 13 & & \\ & & & 4 & 6 \\ & & & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

显然 $(0,0,0,3,-2)^{\mathrm{T}}$ 是其一个解, 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -8 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,0,0,3,-2)^{\mathrm{T}}$. 6.52

对特征值 $\lambda_3 = 5$ (三重), 解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & & & \\ -2 & -4 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -9 & 6 \\ & & & 6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & -2 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 5 的两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = (-2,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_4 = (0,0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_5 = (0,0,0,2,3)^{\mathrm{T}}.$$

6.53

取 $\boldsymbol{\eta}_i = \dfrac{\boldsymbol{\xi}_i}{\|\boldsymbol{\xi}_i\|}, i = 1,2,3,4,5$, 作矩阵

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(0,-8,5,5,5)$. □ 6.54

Exercise 27 (习题 10)**.** 用配方法将下列二次型化为标准形, 并写出所用的坐标变换.

(1) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3$;

(2) $x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(3) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1$.

解: (1)

$$\begin{aligned} x_1^2+4x_1x_2-3x_2x_3 &= (x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2)-4x_2^2-3x_2x_3 \\ &= (x_1+2x_2)^2-4(x_2+\frac{3}{8}x_3)^2+\frac{9}{16}x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} x_1+2x_2=y_1, \\ x_2+\frac{3}{8}x_3=y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1= y_1-2y_2+\frac{3}{4}y_3, \\ x_2= y_2-\frac{3}{8}y_3, \\ x_3= y_3, \end{cases}$$

可将二次型化为标准形 $y_1^2-4y_2^2+\frac{9}{16}y_3^2$. 6.55

(2) 令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3 &= y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3-3y_1y_3+3y_2y_3 \\ &= y_1^2-y_2^2-2y_1y_3+4y_2y_3 \\ &= (y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)-(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2)+3y_3^2 \\ &= (y_1-y_3)^2-(y_2-2y_3)^2+3y_3^2. \end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases} y_1-y_3=z_1, \\ y_2-2y_3=z_2, \\ y_3=z_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1= z_1+z_3, \\ y_2= z_2+2z_3, \\ y_3= z_3, \end{cases}$$

6.56

于是作坐标变换

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

可将二次型化为标准形 $z_1^2-z_2^2+3z_3^2$. 6.57

(3)

$$\begin{aligned} & 2x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3-4x_3x_1 \\ =& 2(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3) \\ & -2x_2^2-2x_3^2+4x_2x_3+5x_2^2+4x_3^2-8x_2x_3 \\ =& 2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_2x_3 \\ =& 2(x_1+x_2-x_3)^2+3(x_2^2-\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{4}{9}x_3^2)-\frac{4}{3}x_3^2+2x_3^2 \\ =& 2(x_1+x_2-x_3)^2+3(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{2}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=y_1, \\ x_2-\frac{2}{3}x_3=y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1= & y_1-y_2+\frac{1}{3}y_3 \\ x_2= & y_2+\frac{2}{3}y_3 \\ x_3= & y_3 \end{cases}$$

即令 6.58

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

可将二次型化为标准形 $2y_1^2+3y_2^2+\frac{2}{3}y_3^2$. □ 6.59

Exercise 28 (习题 13). 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r $(r<n)$, 试证明:

(1) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$, 其中 $d_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 可表示为 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

证: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\cdots,\lambda_n),$$

其中 λ_i 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 所以 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个非零特征值, 不妨设为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$. 取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}$, $d_i=\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$, 则得结论. 6.60

(2) 记 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 由 (1) 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Lambda}_1+\boldsymbol{\Lambda}_2+\cdots+\boldsymbol{\Lambda}_r)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_r\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2+\cdots+\boldsymbol{D}_r. \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_i$ 为第 i 个主对角元为 λ_i, 其余主对角元为 0 的对角矩阵, 且 $\boldsymbol{D}_i=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$. 又

$$\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{D}_i$ 为对称矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{D}_i)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}_i)=1$, $i=1,2,\cdots,r$. 得证结论成立. □ 6.61

Exercise 29 (习题 16). 设 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶实对称矩阵, 且 $\det\boldsymbol{A}>0$. 证明: 存在非零向量 $\boldsymbol{x}_0$, 使得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0>0$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

因为 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0$, 且 n 为奇数, 所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征值大于零, 不妨设 $\lambda_1>0$, 取 $\boldsymbol{y}_0=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}_0=\lambda_1>0$.

因为 $\boldsymbol{y}_0\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_0\neq\boldsymbol{0}$, 且

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}_0=\lambda_1>0.$$

6.62

Exercise 30 (习题 21)**.** 判断下列矩阵是否是正定矩阵:

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_1 = 2 > 0, \\
&\boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \\
&\boldsymbol{A}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,
\end{aligned}$$

所以矩阵为正定矩阵. 6.63

(2) 因为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以矩阵不是正定矩阵.

(3) 因为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_1 = 2 > 0, \\
&\boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \\
&\boldsymbol{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,
\end{aligned}$$

所以矩阵是正定矩阵. 6.64

Exercise 31 (习题 22)**.** 判断下列二次型是否是正定二次型:

(1) $x_1^2 + 3x_2^2 + 20x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 10x_2x_3$;

(2) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(3) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 8x_3x_4$.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 20 \end{pmatrix}$, 因为

$$\boldsymbol{A}_1 = 1 > 0; \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -6 & 19 \end{vmatrix} = 38 - 36 = 2 > 0,$$

所以二次型正定. 6.65

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 因为

$$A_1 = 3 > 0; \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 28 > 0,$$

所以二次型正定. 6.66

(3) 二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, 因为

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 < 0,$$

所以二次型不正定. □ 6.67

Exercise 32 (习题 23)**.** 用正交变换法化二次型 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$ 为标准形, 并说明它是否是正定二次型, 在 $n = 3$ 的情况下, 求出正交变换的矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解: 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

下求其特征值和一组正交的特征向量. 6.68

由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \frac{n+1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{n+1}{2}-\lambda & 1-\lambda & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n+1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} \frac{n+1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=\Big(\frac{n+1}{2}-\lambda\Big)\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)^{n-1},$$

6.69

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\frac{n+1}{2}$, $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{2}$.

对 $\lambda_1=\frac{n+1}{2}$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -\frac{n-1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{n-1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & -\frac{n-1}{2} \end{pmatrix},$$

易见 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是其一个解. 而单重特征值只能对应一个线性无关的特征向量, 故得 $\lambda_1=\frac{n+1}{2}$ 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

6.70

对 $\lambda_2=\frac{1}{2}$ $(n-1$ 重), 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0. \tag{3}$$

取 $\boldsymbol{x}_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, 则余下的与之正交的解, 可取为

$$(1,1,\square,\cdots,\square)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程 (3), 故取 $\boldsymbol{x}_3=(1,1,-2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$. 要保持正交, 余下的解可形如

$$(1,1,1,\square,\cdots,\square)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程 (3), 故取 $\boldsymbol{x}_4=(1,1,1,-3,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

同理可知, $\boldsymbol{x}_n=(1,1,1,\cdots,1,1-n)^{\mathrm{T}}$. 6.71

将 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ 单位化, 令

$$\boldsymbol{\xi}_i=\frac{\boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x}_i\|}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n),$$

且

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \mathrm{diag}(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}).$$

则二次型的标准形为

$$\frac{n+1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \dots + \frac{1}{2}y_n^2,$$

二次型为正定二次型. 6.72

在 $n=3$ 的情况下, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. 对应的一组两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_3 = (1,1.-2)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

于是正交变换矩阵为

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

6.73

Exercise 33 (习题 24)**.** 对上题中 $n=3$ 时得二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$.

解: 在 $n=3$ 的情况下, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$. 由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

6.74

记

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵, 而且 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\sqrt{2}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (二重), 故 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵, 而且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$. □ 6.75

Exercise 34 (习题 25)**.** 求下列二次型中的参数 t, 使得二次型正定:

(1) $5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

(2) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$.

解: (1) 二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{pmatrix}$, 要使得二次型正定, 则各阶主子式应为正. 由

$$\boldsymbol{A}_1=5>0,\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & t-1\end{vmatrix}=t-2>0,$$

即 $t>2$ 时, 二次型正定. 6.76

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & t & 1\\ t & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, 要使得二次型正定, 则 t 应满足

$$\boldsymbol{A}_2=2-t^2>0;$$

$$\boldsymbol{A}_3=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & t & 1\\ t & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & t & 1\\ t & 1 & 0\\ -5 & -3t & 0\end{vmatrix}=5-3t^2>0,$$

即 $|t|<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 时, 二次型正定. □ 6.77

Exercise 35 (习题 26)**.** 用矩阵的特征值和特征向量的定义及正定二次型的定义, 证明正定矩阵的特征值大于零.

证: 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

两边同时左乘以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$, 得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 及特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$, 从而 $\lambda>0$. □ 6.78

Exercise 36 (习题 27)**.** 设 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 用正定二次型的定义证明: $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵.

证: 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 从而

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}>0.$$

即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 正定. □ 6.79

Exercise 37 (习题 28)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是实可逆矩阵, 证明 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是实对称矩阵, 而且也是正定矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 于是

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是实对称矩阵.

对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 又因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}>0.$$

即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 正定. □ 6.80

Exercise 38 (习题 29)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以 $|\boldsymbol{A}|>0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 而 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值全大于 0, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 正定. □ 6.81

Exercise 39 (习题 30)**.** 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶正定矩阵, k, l 都是正数, 用定义证明 $k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵, 所以对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$, 又因为 k, l 都是正数, 所以对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0.$$

即 $k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵. □ 6.82

Exercise 40 (习题 31)**.** 判断下列矩阵是否负定, 半正定, 半负定:

(1) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-2&1\\0&1&-3\end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

6.83

解: (1) 因为

$$\boldsymbol{A}_1=-1<0,$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}=1>0,$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&-2&1\\0&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&-2&1\\0&1&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1\\1&-3\end{vmatrix}=-2<0,$$

所以矩阵为负定矩阵. 6.84

(2) 因为

$$\boldsymbol{A}_1=1>0,$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = 1 > 0,
$$

$$
\boldsymbol{A}_3 = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0,
$$

所以矩阵是不定矩阵. 6.85

(3) 因为

$$
\boldsymbol{A}_1 = 0,
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0,
$$

$$
\boldsymbol{A}_3 = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -6 < 0,
$$

所以矩阵是半负定矩阵. 6.86

(4) 因为

$$
\boldsymbol{A}_1 = -2 < 0,
$$

$$
\boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0,
$$

$$
\boldsymbol{A}_3 = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,
$$

所以矩阵是不定矩阵. 6.87

Example 41 (习题 32). 证明: 正定矩阵的主对角元必全大于零; 负定矩阵的主对角元必全小于零.

证: 若 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 正定, 则二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定. 取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, 则

$$
f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a_{ii} > 0.
$$

同理, 若 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 负定. 取 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, 则有 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ii} < 0$. □ 6.88

Exercise 42 (习题 33). 设 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半负定二次型, 问

(1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 是否半正定?

(2) $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式是否全都小于等于零?

解: (1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 是半正定.

(2) 不是. $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式全小于等于零, 偶数阶顺序主子式全大于等于零, 且至少有一个等于零. □ 6.89

Exercise 43 (习题 34)**.** 判断下列二次型是否是有定二次型:

(1) $-x_1^2-2x_2^2-5x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$;

(2) $x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$;

(3) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_2x_2-4x_2x_3$.

解: (1) 二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&2\\0&2&-5\end{pmatrix}$, 因为

$$\boldsymbol{A}_1=-1<0,\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=1>0,$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&2\\0&2&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}-1&-1&0\\0&-1&2\\0&2&-5\end{vmatrix}=-1<0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵, 即二次型为负定二次型. 6.90

(2) 二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}$, 因为

$$\boldsymbol{A}_1=1>0,\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\0&-2&4\end{vmatrix}=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵, 即二次型为半正定二次型. 6.91

(3) 二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$, 因为

$$\boldsymbol{A}_1=1>0,\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\0&-2&3\end{vmatrix}=-1<0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为不定矩阵, 即二次型为不定二次型. □ 6.92

Exercise 44 (习题 35)**.** 证明: $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

证: (必要性) 因为 $\boldsymbol{A}$ 负定, 所以 $\boldsymbol{A}\simeq-\boldsymbol{I}$, 亦即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{I}$. 即

$$\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1},$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$, 则有 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

(充分性) 因为存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, 即

$$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{I},$$

亦即 $\boldsymbol{A}\simeq-\boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 负定. □ 6.93

Exercise 45 (习题 36)**.** 设 $\boldsymbol{B}$ 是一个 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<n$, 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵.

证: 对任意 $\boldsymbol{x}$, 总有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})\geqslant 0.$$

又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<n$, 所以方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解, 即存在 $\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, 从而

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})=(\mathbf{0},\mathbf{0})=0.$$

所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵. □ 6.94

Exercise 46 (习题 37)**.** 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵, 则存在半正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 且特征值全部大于等于零, 从而存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$ 以及

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\big(\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\big)^2,$$

可得:

$$\boldsymbol{A}=\big(\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\big)^2.$$

取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵, 且 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\sqrt{\lambda_i}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 故 $\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵, 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$. □ 6.95

Exercise 47 (习题 38)**.** 若对于任意的全不为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 恒大于零, 问二次型 f 是否正定?

解: 不一定.

如: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(x_2-x_3)^2$, 当 x_1,x_2,x_3 全不为零时, $f(x_1,x_2,x_3)>0$ 恒成立, 但二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(x_2-x_3)^2$ 不正定. □ 6.96

Exercise 48 (习题 39)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 证明: 当 t 充分大时, $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 是正定矩阵.

证: 首先易知 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 为实对称矩阵. 再设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 的全部特征值为

$$\lambda_i+t\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

当 t 充分大时, 一定可以使得 $\lambda_i+t>0$, 从而使得 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵. □ 6.97

Exercise 49 (习题 40)**.** 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 问 t 满足什么条件时, $\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{I}$ 是正定矩阵.

证: 首先 $\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{I}$ 为实对称矩阵. 由题设可知 $\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{I}$ 的全部特征值为

$$\lambda_i - t \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

当 $\lambda_i - t > 0$, 即

$$t < \min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

时, $\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵. □ 6.98

Exercise 50 (习题 41)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵, 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 都成对角形矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{I}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_1$, 使得 $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{I}$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1$ 也是实对称矩阵, 从而存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}_2$, 使得

$$\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{\Lambda},$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角元为矩阵 $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1$ 的特征值.

取 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{\Lambda}.\end{aligned}$$

证毕. □ 6.99

Exercise 51 (习题 42)**.** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆是正定矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵. 又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 所以

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵可知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵. (事实上, 由 $\boldsymbol{A}$ 正定得 $|\boldsymbol{A}| > 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 全大于零, 于是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\frac{1}{\lambda_i}$ 也全大于零.) 所以对任意 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} > 0$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} > 0$.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow \lambda = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}} > 0.$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵. □ 6.100

Exercise 52 (习题 43)**.** 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 证明

$$f(\boldsymbol{x}) = \det\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

是一个负定二次型.

分析: 只需证明对任意 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x})<0$.
证:

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\times r_2}\begin{vmatrix}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} & 0\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}|.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以 $|\boldsymbol{A}|>0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定, 即对任意 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0$. 于是对任意 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 有

$$f(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}|<0.$$

结论成立. □ 6.101

Exercise 53 (习题 44)**.** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵, 证明 $\det\boldsymbol{A}\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

证: 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1,n})^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都大于零, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 也是正定矩阵, 当然也是可逆矩阵.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\times r_1}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}\\&=|\boldsymbol{A}_{n-1}|(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ 正定, 所以 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$, 从而 $a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\leqslant a_{nn}$, 即

$$|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}\boldsymbol{A}_{n-1}.$$

类似递推下去可得:

$$|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}\boldsymbol{A}_{n-1}\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}\boldsymbol{A}_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{11}.$$

6.102

Exercise 54 (习题 45)**.** 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 n 阶实可逆矩阵, 证明:

$$|\boldsymbol{B}|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(b_{1i}^2+b_{2i}^2+\cdots+b_{ni}^2).$$

证: 显然 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵. 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})>0$$

即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵. 注意到 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的主对角元为 $b_{1i}^2+b_{2i}^2+\cdots+b_{ni}^2$, $i=1,2,\cdots,n$, 由习题 44 可知

$$|\boldsymbol{B}|^2=|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|\leqslant\prod_{i=1}^{n}(b_{1i}^2+b_{2i}^2+\cdots+b_{ni}^2).$$

6.103

Exercise 55 (习题 46)**.** 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 试求参数 a 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解: 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 及

$$|\boldsymbol{A}|=2(9-a^2)=10,$$

得 $a=\pm2$.

(1) 当 $a=2$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$. 6.104

对 $\lambda_1=1$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

对 $\lambda_2=2$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得对应于特征值 2 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 6.105

对 $\lambda_3=5$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

即当 $a=2$ 时,

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

6.106

(2) 当 $a=-2$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_1 = 1$, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

6.107

对 $\lambda_2 = 2$, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得对应于特征值 2 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 6.108

对 $\lambda_3 = 5$, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (0,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

即当 $a = -2$ 时,

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6.109

Exercise 56 (习题 47)**.** 已知 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2,

(1) c;

(2) 方程 $f(x_1,x_2,x_3) = 1$ 表示何种曲面.

解: 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$.

(1) 由题设知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$, 故

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix} = 24c - 72 = 0,$$

得 $c=3$. 6.110

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}5-\lambda & -1 & 3\\ -1 & 5-\lambda & -3\\ 3 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}4-\lambda & 4-\lambda & 0\\ -1 & 5-\lambda & -3\\ 3 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 6-\lambda & -3\\ 3 & -6 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)[(6-\lambda)(3-\lambda)-18]=\lambda(4-\lambda)(\lambda-9).$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0, 4, 9, 故二次型可以通过正交变换化为标准形 $4y_2^2+9y_3^2$.

注意到正交变换不改变曲面的类型, 所以 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭圆柱面.

□ 6.111

Exercise 57 (习题 48)**.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2$, k 为实数, $\boldsymbol{I}$ 为单位阵. 求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{\Lambda}$; 并问: k 为何值时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 又

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[(1-\lambda)^2-1]=\lambda(2-\lambda)(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=2$. 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(0,2,2)=\boldsymbol{\Lambda}_1.$$

6.112

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^2+2k\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+2k\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+k^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{\Lambda}_1^2+2k\boldsymbol{\Lambda}_1+k^2\boldsymbol{I}\\&=\mathrm{diag}(k^2,(k+2)^2,(k+2)^2),\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(k^2,(k+2)^2,(k+2)^2),$$

其中 k^2, $(k+2)^2$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

要使得 $\boldsymbol{B}$ 正定, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 k^2, $(k+2)^2$ 应大于零, 即当 $k\neq 0$ 且 $k\neq -2$ 时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵. □ 6.113

Exercise 58 (习题 49)**.** 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$, 其中 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 均为实数, 问: a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足什么条件时, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定.

解: 显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $\begin{cases} x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0,\\ x_n+a_nx_1=0.\end{cases}$ 6.114

方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n.$$

当 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时, 方程组的系数行列式不等于 0, 方程组只有零解, 即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,0,\cdots,0)$. 此时二次型正定. □ 6.115

Exercise 59 (习题 50)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称正定矩阵, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 证明: $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定的充要条件为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

证: (充分性) 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$, 所以方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 即对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 都有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})>0,$$

故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定.

(必要性) 用反证法, 假设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<n$, 则方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 即存在 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 从而

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})=0,$$

这与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定矛盾, 所以假设不成立, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$. □ 6.116

7 复习

对称矩阵正定的充要条件

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的 $\Longleftrightarrow$ 二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正. 6.117

等价、相似、合同、正交相似

- 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.
- 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,
  $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.
  $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.
  $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似 $\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. 6.118

等价、相似、合同、正交相似的区别和联系

- 等价的矩阵不必是方阵, 后面三个都是方阵之间的关系.
- 相似、合同、正交相似都是等价的一种; 正交相似关系最强, 等价关系最弱.
- 相似与合同没有什么关系, 仅当 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵时, 有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 这时相似与合同是一致的.

6.119

判别正定性

Example 60 (P386, 题 2). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵, 证明 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right|>1$.

证: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的全部特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$.

由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 故特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于 0, 所以

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

□ 6.120

Example 61 (研 2002). 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

解: (1) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$, 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$, 得

$$(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}$ 是特征向量, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 所以

$$\lambda^2+2\lambda=0,$$

得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=0$. 6.121

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 必可以相似对角化, 设 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 进而有

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=0$.

(2) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $-2,-2,0$, 相应地 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $-2+k$, $-2+k$, k. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵的充要条件是特征值全为正, 所以 $k>2$ 时 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵. □ 6.122

Example 62. 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 是实反对称矩阵, 即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵.

证: 先说明 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2$ 为实对称矩阵. 事实上

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-(-\boldsymbol{A})(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2.$$

又对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,$$

得二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{x}$ 为正定, 所以矩阵 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2$ 为正定矩阵. □ 6.123