Chapter 2

二元关系

Discrete Mathematics

January 3, 2015

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

2.1

1 关系的定义及表示

关系的概念

事物之间存在着各式各样的关系. 例如,

- 人际关系 (老乡关系, 同学关系, 朋友关系等);
- 数之间的大于关系, 整除关系等.

Example 1. 三名学生 A, B, C 选修 α, β, γ, δ 四门课, 设 A 选 α 和 δ, B 选 γ, C 选 α 和 β, 那么, 学生选课的对应关系可记为:

$$R = \big\{\langle A,\, \alpha\rangle,\, \langle A,\, \delta\rangle,\, \langle B,\, \gamma\rangle,\, \langle C,\, \alpha\rangle,\, \langle C,\, \beta\rangle\big\} \tag{1}$$

集合 R 反映了学生集合 $S = \{A, B, C\}$ 与课程集合 $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ 之间的某种关系.

☞ 集合 R 是直积 $A \times B$ 的子集. 2.2

关系的概念

Definition 2 (关系 (relation))**.** 令 A 和 B 是任意两个集合, 直积 $A \times B$ 的子集 R 称为 A 到 B 的二元关系.

1. R 中的任一序偶 $\langle x, y\rangle$ 可记为 $\langle x, y\rangle \in R$, 或 xRy.
2. 不在 R 中的序偶 $\langle x, y\rangle$ 记为 $\langle x, y\rangle \notin R$, 或 $x \not R y$.

特别地, 若 $R \subseteq A \times A$, 称 R 为 A 上的二元关系.

几个特殊的二元关系

1. $\varnothing \subseteq A \times B$, 称 $\varnothing$ 为 A 到 B 的空关系.
2. $A \times B \subseteq A \times B$, 称 $A \times B$ 为 A 到 B 的全关系或全域关系.
3. $I_A = \big\{\langle x, x\rangle \big| x \in A\big\}$, 称为 A 上的恒等关系.

2.3

集合 A 上的二元关系

集合 A 上的二元关系, 很常见.

Example 3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 求 A 上的 "小于等于" 关系 L_A.

解:

$$\begin{aligned} L_A &= \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leqslant y\} \\ &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}. \end{aligned}$$

Example 4. Let A be the set $\{1, 2, 3, 4\}$. Which ordered pairs are in the relation $R = \{\langle a, b\rangle \mid a \text{ divides } b\}$?

Solution: Because $\langle a, b\rangle$ is in R if and only if a and b are positive integers not exceeding 4 such that a divides b, we see that

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}. \quad \square$$

2.4

Definition 5 (定义域, 值域)**.** 设 R 为一个二元关系,

- 由 $\langle x, y\rangle \in R$ 的所有 x 组成的集合 $\operatorname{dom} R$ 称为 R 的定义域 (domain), 即

$$\operatorname{dom} R = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\} \tag{2}$$

- 由 $\langle x, y\rangle \in R$ 的所有 y 组成的集合 $\operatorname{ran} R$ 称为 R 的值域 (range), 即

$$\operatorname{ran} R = \{y \mid (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\} \tag{3}$$

显然地,

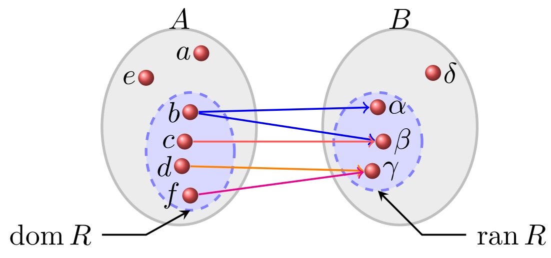
- $\operatorname{dom} R \subseteq A$,
- $\operatorname{ran} R \subseteq B$,
- $R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{ran} R \subseteq A \times B$.

2.5

Example 6. 设 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. 记关系 R 为

$$R = \{\langle b, \alpha\rangle, \langle b, \beta\rangle, \langle c, \beta\rangle, \langle d, \gamma\rangle, \langle f, \gamma\rangle\}$$

那么如图所示:



$$\operatorname{dom} R = \{b, c, d, f\}, \qquad \operatorname{ran} R = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

☞ 强调: 关系 R 是直积 $A \times B$ 的子集. R 也是 $\operatorname{dom} R \times \operatorname{ran} R$ 的子集.

2.6

Example 7. 在一个有 n 个元素的集合 A 上, 可以有多少种不同的关系?

解: 集合 A 上的二元关系的个数与 $A \times A$ 的子集个数相同. 若 $\text{card}(A) = n$, 则

$$\text{card}(A \times A) = n^2, \tag{4}$$

所以, $A \times A$ 的子集个数就有 2^{n^2} 个, 即 A 上不同的二元关系有 2^{n^2} 个. □

例如, 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有 $2^{4^2} = 2^{16} = 65536$ 个不同的二元关系.
在集合 $\{a, b, c, d, e\}$ 上有 $2^{5^2} = 2^{25} = 33554432$ 个不同的二元关系.
在集合 $\{a, b, c, d, e, f\}$ 上有 $2^{6^2} = 2^{36} = 68719476736$ 个不同的二元关系.

☞ 若 $\text{card}(A) = m$, $\text{card}(B) = n$. 问 A 到 B 可以有多少个不同的二元关系?(答案: 2^{mn} 个.) 2.7

二元关系的表示

一个二元关系可用 ① 集合(序偶的集合), ② 关系矩阵, ③ 关系图表示. 下面来看关系矩阵和关系图.

关系矩阵

给定两个有限集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. 设 R 为从 X 到 Y 的一个二元关系. 则对应于关系 R 的关系矩阵为矩阵 $M_R = (r_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \langle x_i, y_j \rangle \in R, \\ 0, & \langle x_i, y_j \rangle \notin R. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n.)$$

2.8

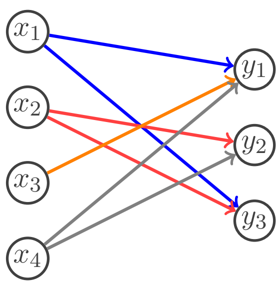
Example 8. 设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. X 到 Y 上的关系 R 为

$$R = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_3 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_2, y_3 \rangle, \langle x_3, y_1 \rangle, \langle x_4, y_1 \rangle, \langle x_4, y_2 \rangle\}.$$

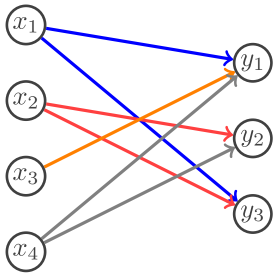
试写出关系矩阵 M_R.

解: 关系矩阵为 也可以用图形来表示关系 R: 2.9

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$



关系图



- 关系图中表示元素的小圆圈, 称为结点 (node);
- 表示元素间具有 R 关系的有向线段或有向弧, 称为有向边 (direct edge);
- 起点和终点重合的有向边, 称为环 (loop) 或自回路.
- 关系 R 的关系图记为 G_R.

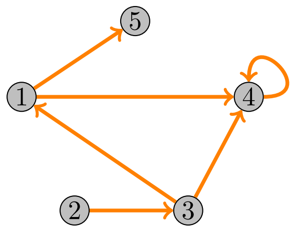
2.10

关系图

Example 9. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 在 A 上的二元关系 R 定义为:

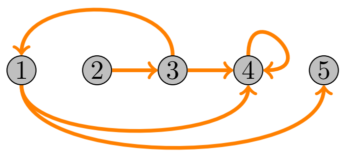
$$R = \big\{\langle 1,\ 5\rangle,\ \langle 1,\ 4\rangle,\ \langle 2,\ 3\rangle,\ \langle 3,\ 1\rangle,\ \langle 3,\ 4\rangle,\ \langle 4,\ 4\rangle\big\}$$

画出 R 的关系图.



解: 因为 R 是 A 上的关系, 故只需画出 A 中的每个元素即可.

或者



2.11

习题

对 $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的二元关系, $R = \big\{\langle x,\ y\rangle \;\big|\; x < y \vee x \text{ 是质数}\big\}$, 写出关系矩阵.

解: 因为 P 中的元素为质数的有: 2, 3, 5. 又注意到联接词为 $\vee$, 得关系矩阵为:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.12

习题

对 $P=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系, $R=\{\langle x,\,y\rangle \mid x<y\vee x \text{ 是质数}\}$, 写出关系矩阵.

若设 $R_1=\{\langle x,\,y\rangle \mid x<y\}$, $R_2=\{\langle x,\,y\rangle \mid x \text{ 是质数}\}$. 则

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad M_{R_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从中不难发现 $M_{R_1}\vee M_{R_2}=M_R$ 的规律:

矩阵对应位置的元素作 “$\vee$” 运算: $0\vee 0=0,\ 0\vee 1=1\vee 0=1,\ 1\vee 1=1.$

☞ 若关系为 $R=\{\langle x,\,y\rangle \mid x<y\wedge x \text{ 是质数}\}$ 呢? 2.13

2 关系的运算

关系的运算

Theorem 10. *若 Z 和 S 是从集合 X 到集合 Y 的两个关系, 则 Z,S 的并、交、补、差, 仍是 X 到 Y 的关系.*

证明思路: 根据“关系是直积的子集”可证.

证: 因为 $Z\subseteq X\times Y$, $S\subseteq X\times Y$, 故

$$Z\cup S\subseteq X\times Y, \tag{5}$$
$$Z\cap S\subseteq X\times Y, \tag{6}$$
$$\sim S=(X\times Y-S)\subseteq X\times Y, \tag{7}$$
$$Z-S=Z\cap\sim S\subseteq X\times Y. \tag{8}$$

□ 2.14

Example 11. Let R_1 be the “less than” relation on the set of real numbers and let R_2 be the “greater than” relation on the set of real numbers, that is, $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x<y\}$ and $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x>y\}$. What are $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_1-R_2, R_2-R_1, and $R_1\oplus R_2$?

Solution: We note that $\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2$ if and only if $\langle x, y\rangle \in R_1$ or $\langle x, y\rangle \in R_2$. Hence, $\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2$ if and only if $x < y$ or $x > y$. Because the condition $x < y$ or $x > y$ is the same as the condition $x \neq y$, it follows that $R_1 \cup R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \neq y\}$. In other words, the union of the "less than" relation and the "greater than" relation is the "not equals" relation.

Next, note that it is impossible for a pair $\langle x, y\rangle$ to belong to both R_1 and R_2 because it is impossible for $x < y$ and $x > y$. It follows that $R_1 \cap R_2 = \varnothing$.

We also see that $R_1 - R_2 = R_1$, $R_2 - R_1 = R_2$, and $R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2 - R_1 \cap R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \neq y\}$. □ 2.15

逆关系

Definition 12 (逆关系)**.** 设 R 是从 A 到 B 的二元关系, 关系 R 的逆 (R 的逆关系) 记为 R^{c} 或 $\widetilde{R}$, 定义如下:

$$R^{\mathrm{c}} = \big\{\langle b,\, a\rangle \mid \langle a,\, b\rangle \in R\big\}.$$

Example 13. 例如, 对关系 $R = \{\langle 1,\, a\rangle, \langle 2,\, b\rangle, \langle 3,\, c\rangle\}$, 其逆关系为

$$R^{\mathrm{c}} = \big\{\langle a,\, 1\rangle, \langle b,\, 2\rangle, \langle c,\, 3\rangle\big\}.$$

☞ 注意一个常用的表达:

$$\langle a,\, b\rangle \in R \Leftrightarrow \langle b,\, a\rangle \in R^{\mathrm{c}}.$$

2.16

- 恒等关系的逆, 是恒等关系;
- 空关系的逆, 是空关系;
- 全域关系的逆, 是全域关系. 2.17

逆关系的求法

1. 列举法: 把 R 中每一序偶的元素顺序互换, 可得到逆关系 R^{c} 的所有元素.
2. 关系矩阵: 将矩阵 M_R 转置, 得 R^{c} 的关系矩阵 $M_{R^{\mathrm{c}}}$. 即

$$M_{R^{\mathrm{c}}} = M_R^{\mathrm{T}}.$$

3. 关系图: 在 R 的关系图中, 颠倒每条弧 (有向边) 的箭头方向, 得到 R^{c} 的关系图. 2.18

逆关系的性质

Theorem 14. 设 R, R_1, R_2 是 A 到 B 的二元关系, 则

1. *$(R^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = R$;*
2. *$(R_1 \cup R_2)^{\mathrm{c}} = R_1^{\mathrm{c}} \cup R_2^{\mathrm{c}}$;*

3. $(R_1 \cap R_2)^{\mathrm{c}} = R_1^{\mathrm{c}} \cap R_2^{\mathrm{c}}$;
4. $(R_1 - R_2)^{\mathrm{c}} = R_1^{\mathrm{c}} - R_2^{\mathrm{c}}$;
5. $(\overline{R})^{\mathrm{c}} = \overline{R^{\mathrm{c}}}$, (这里 $\overline{R} = A \times B - R$).

☞ 其中 $\overline{R} = A \times B - R$ 是 $A \times B$ 中不属于 R 的序偶所成的集合, 称为 R 的关系补 (complement of a relation). 或说, $\overline{R}$ 是 R 关于 $A \times B$ 的补集. 有常用关系式:

$$\langle a,\, b\rangle \in R \Leftrightarrow \langle a,\, b\rangle \notin \overline{R}, \quad \text{或} \quad \langle a,\, b\rangle \notin R \Leftrightarrow \langle a,\, b\rangle \in \overline{R}.$$

下面来证明 ⑤ . 2.19

Example 15. 设 R 是 A 到 B 的二元关系, 则 $(\overline{R})^{\mathrm{c}} = \overline{R^{\mathrm{c}}}$.

比如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\overline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{(\overline{R})^{\mathrm{c}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_{R^{\mathrm{c}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\overline{R^{\mathrm{c}}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证: 注意到关系式

$$\begin{aligned} \langle a,\, b\rangle \in R &\Leftrightarrow \langle b,\, a\rangle \in R^{\mathrm{c}}, \\ \langle a,\, b\rangle \notin R &\Leftrightarrow \langle a,\, b\rangle \in \overline{R}. \end{aligned}$$

对任意的 $\langle a,\, b\rangle \in (\overline{R})^{\mathrm{c}}$, 有

$$\begin{aligned} \langle a,\, b\rangle \in (\overline{R})^{\mathrm{c}} &\Leftrightarrow \langle b,\, a\rangle \in \overline{R} \\ &\Leftrightarrow \langle b,\, a\rangle \notin R \\ &\Leftrightarrow \langle a,\, b\rangle \notin R^{\mathrm{c}} \\ &\Leftrightarrow \langle a,\, b\rangle \in \overline{R^{\mathrm{c}}}. \end{aligned}$$

所以

$$(\overline{R})^{\mathrm{c}} = \overline{R^{\mathrm{c}}}.$$

2.20

复合关系

Definition 16 (复合关系)**.** 设 R_1 是从 A 到 B 的关系, R_2 是从 B 到 C 的关系, 则 R_1 与 R_2 的复合关系为从 A 到 C 的关系, 记为 $R_1 \circ R_2$, 定义为

$$R_1 \circ R_2 = \big\{\langle a, c\rangle \,\big|\, a \in A \wedge c \in C \wedge (\exists b)(b \in B \wedge \langle a, b\rangle \in R_1 \wedge \langle b, c\rangle \in R_2)\big\}.$$

其中 $\circ$ 表示关系的合成运算. 2.21

关系合成运算的性质

- 设 R 是从 A 到 B 的关系, I_A, I_B 分别是 A, B 上的恒等关系, 则 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$;
- 如果关系 R_1 的值域与 R_2 的定义域的交集为空集, 则合成关系 $R_1 \circ R_2$ 是空关系;
- 关系的合成满足结合律:
  设 R_1, R_2, R_3 分别是从 A 到 B, B 到 C, C 到 D 的关系, 则

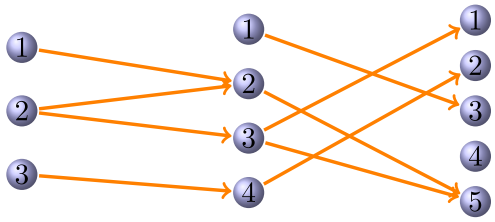
$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

2.22

Example 17. 设关系 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, $S = \{\langle 4,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,5\rangle\}$. 求复合关系 $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ R$, $R \circ R \circ R$.

解:
$$\begin{aligned} R \circ S &= \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,5\rangle\}, \\ S \circ R &= \{\langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,4\rangle\}, \\ R \circ R &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}, \\ R \circ R \circ R = (R \circ R) \circ R &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}. \end{aligned}$$

用关系图来反映关系的复合, 更为直观、可靠. 比如 $R \circ S$:



2.23

用关系矩阵求复合关系

设 $A \circ B = C$, 关系矩阵为 $M_A = (a_{ij})_{n\times n}$, $M_B = (b_{ij})_{n\times n}$, $M_C = (c_{ij})_{n\times n}$. 则

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj}). \tag{9}$$

上式中 $\vee$ 代表逻辑加, 满足 $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 1$. $\wedge$ 代表逻辑乘, 满足 $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$.

如何理解?

- 公式 (9) 的理解: 要想 “i” 与 “j” 建立关系, 则至少存在一个 “k”, 使 “i” 与 “k” 有关系, 且 “k” 与 “j” 有关系. (公式 (9) 中的 $\bigvee$ 和 $\wedge$ 分别体现的就是 “至少存在一个” 和 “且”.)

- 逻辑加和逻辑乘的理解: 关系矩阵中的元素 1 和 0, 表达的是关系的 “有” 和 “无”, 即 **T** 和 **F**. (把运算规则中的 1 和 0 分别换成 **T** 和 **F**, 易见等式成立.)

2.24

Example 18. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, R_1 是从 A 到 B 的关系, R_2 是从 B 到 C 的关系:

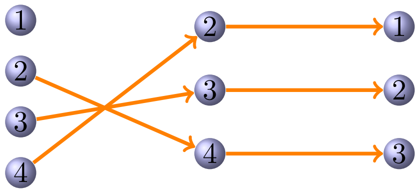
$$R_1 = \big\{\langle x, y\rangle \bigm| x + y = 6\big\} = \big\{\langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\big\}, \tag{10}$$
$$R_2 = \big\{\langle y, z\rangle \bigm| y - z = 1\big\} = \big\{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\big\}. \tag{11}$$

分别用列举法、图示法、关系矩阵法表示关系的合成 $R_1 \circ R_2$.

解: ① (列举法)

$$R_1 \circ R_2 = \big\{\langle 2, 3\rangle,\ \langle 3, 2\rangle,\ \langle 4, 1\rangle\big\}.$$

② (图示法)



解: ③ (关系矩阵法)

$$M_{R_1 \circ R_2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.25

关系的幂

Definition 19 (关系的幂)**.** 设 R 是集合 A 上的二元关系, $n \in \mathbb{N}$ 为任一自然数, 则 R 的 n 次幂记为 R^n, 定义为:

1. R^0 为 A 上的恒等关系,

$$R^0 = \big\{\langle x,\ x\rangle \bigm| x \in A\big\}.$$

2. $R^{n+1} = R^n \circ R$.

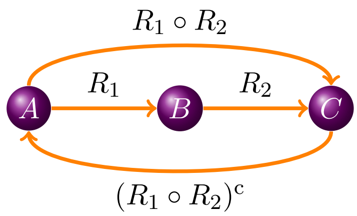
2.26

Theorem 20. 设 R_1 是从 A 到 B 的关系, R_2 是从 B 到 C 的关系, 则

$$(R_1 \circ R_2)^{\mathrm{c}} = R_2^{\mathrm{c}} \circ R_1^{\mathrm{c}} \tag{12}$$

证:

$$
\begin{aligned}
& \langle c,\, a\rangle \in (R_1 \circ R_2)^{\mathrm{c}} \\
\Leftrightarrow\ & \langle a,\, c\rangle \in R_1 \circ R_2 \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b)\big(b \in B \wedge \langle a,\, b\rangle \in R_1 \wedge \langle b,\, c\rangle \in R_2\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b)\big(b \in B \wedge \langle b,\, a\rangle \in R_1^{\mathrm{c}} \wedge \langle c,\, b\rangle \in R_2^{\mathrm{c}}\big) \\
\Leftrightarrow\ & \langle c,\, a\rangle \in R_2^{\mathrm{c}} \circ R_1^{\mathrm{c}}.
\end{aligned}
$$



2.27

3 关系的基本类型

关系的基本类型

以下设 R 是集合 A 上的一个二元关系, 讨论 R 的几个基本类型:

1. 自反;
2. 对称;
3. 传递;
4. 反自反;
5. 反对称. 2.28

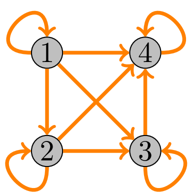
自反 (reflexive)

Definition 21. 若对 A 中的每一 x, 有 xRx, 则称 R 是自反的;

$$
\begin{aligned}
R \text{ 是自反的} & \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to xRx) \\
& \Leftrightarrow M_R \text{ 主对角元全为 } 1 \\
& \Leftrightarrow G_R \text{ 每一结点有自回路}.
\end{aligned}
$$

例如, 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R 为 “$\leqslant$”. 则

$$
M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$



☞ “$=$”, “$\leqslant$”

都是具有自反性关系的例子. 又如平面上三角形的全等关系是自反的. 2.29

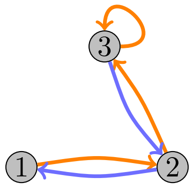
对称 (symmetric)

Definition 22. 若对每一 $x, y \in A$, xRy 蕴含着 yRx, 则称 R 是对称的;

$$\begin{aligned} R \text{ 是对称的} &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \to yRx) \\ &\Leftrightarrow M_R \text{ 是对称矩阵} \\ &\Leftrightarrow G_R \text{ 有向边成对出现 (若有 } a \text{ 到 } b \text{ 的弧, 则必有 } b \text{ 到 } a \text{ 的弧).} \end{aligned}$$

例如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



相等、等势[1]7> 如果在两个集合 A, B 之间存在一个一一对应, 则称 A, B 是等势的.、同余等都是具有对称性的关系的例子. 2.30

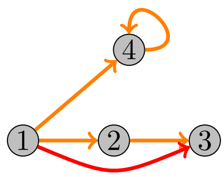
传递 (transitive)

Definition 23. 对每一 $x, y, z \in A$, 若 xRy, yRz 蕴含着 xRz, 则称 R 是传递的.

$$\begin{aligned} R \text{ 是传递的} &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \to xRz) \\ &\Leftrightarrow G_R \text{ 中若从 } a \text{ 到 } b \text{ 有一条路径, 则从 } a \text{ 到 } b \text{ 有一条弧.} \end{aligned}$$

例如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



☞ “$=$”, “$<$”, “$\leqslant$”, “$\subset$”, “$\subseteq$”, 整除, 等势, 同余等都是具有传递性关系的例子. 2.31

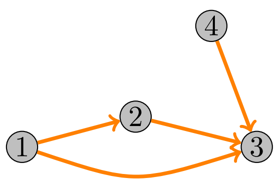
反自反 (irreflexive)

Definition 24. 对 A 中的每一 x, 若 $x \not R x$, 则称 R 是反自反的;

$$\begin{aligned} R \text{ 是反自反的} &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \not R x) \\ &\Leftrightarrow M_R \text{ 主对角元全为 } 0 \\ &\Leftrightarrow G_R \text{ 每一结点无自回路.} \end{aligned}$$

例如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



☞ “$<$”, “$>$” 是具有反自反性质的两个重要关系. 2.32

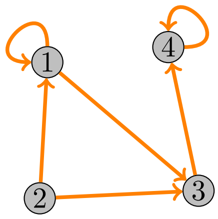
[1] <

反自反 (irreflexive)

注意: 一个不是自反的关系, 不一定就是反自反的.

例如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- 关系矩阵的主对角元素不是全为 1, 所以不是 “自反” 的;
- 关系矩阵的主对角元素不是全为 0, 所以不是 “反自反” 的.

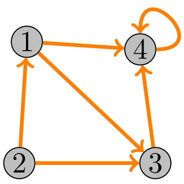
☞ “自反” 的否定不是 “反自反”. 2.33

反对称 (antisymmetric)

Definition 25. 对每一 x, $y \in A$, 若 xRy, yRx 蕴含着 $x = y$, 则称 R 是反对称的;

$$\begin{aligned} R \text{ 是反对称的} &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y) \\ &\Leftrightarrow (\forall i)(\forall j)\big(i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \wedge i \neq j \wedge (a_{ij} = 1) \rightarrow (a_{ji} = 0)\big); \\ &\Leftrightarrow G_R \text{ 中若有 } a \text{ 到 } b \text{ 的弧, 则必没有 } b \text{ 到 } a \text{ 的弧;} \end{aligned}$$

例如, $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2.34

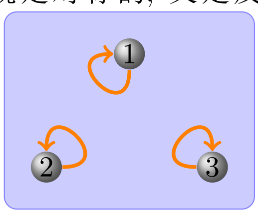


反对称 (antisymmetric)

例如, 实数集合中 “$\leqslant$” 是反对称的; 集合的 “$\subseteq$” 关系是反对称的.

注意: 可能有某种关系, 既是对称的, 又是反对称的. 例如, [1em]

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



☞ “对称” 的否定不是 “反对称”.

(不具备对称性的关系称为非对称关系 (asymmetric). 例如 “$<$” 和 “$\subset$”.) 2.35

Theorem 26. 设 R 为 A 上的关系, 证明

1. R 在 A 上自反, 当且仅当 $I_A \subseteq R$.
2. R 在 A 上反自反, 当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$.
3. R 在 A 上传递, 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

证: ① 必要性. 任取 $\langle x,x\rangle \in I_A$, 如果 R 在 A 上自反, 必有

$$\langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R,$$

从而 $I_A \subseteq R$.

充分性. 当 $I_A \subseteq R$ 时, 任取 $x \in A$, 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R,$$

因此 R 在 A 上是自反的.

☞ 直观地看, R 是自反的, 则 M_R 的主对角线元素全为 1. 所以 $I_A \subseteq R$.

② $\boxed{R \text{ 是反自反的 } \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \notin R) \Leftrightarrow M_R \text{ 主对角元全为 } 0.}$

必要性 (反证法). 设 R 在 A 上反自反, 但 $R \cap I_A \neq \varnothing$, 必存在 $\langle x, y\rangle \in R \cap I_A$, 则

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \cap I_A &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in I_A \\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge (x = y) \\ &\Rightarrow \langle x, x\rangle \in R.\end{aligned}$$

这与 R 是反自反的相矛盾.

充分性. 设 $R \cap I_A = \varnothing$, 任取 $x \in A$, 则

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \notin R.$$

所以 R 在 A 上是反自反的.

③ (必要性) 设 R 在 A 上是传递的. 任取 $\langle x, y\rangle \in R \circ R$, 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \circ R &\Rightarrow (\exists t)(\langle x,t\rangle \in R \wedge \langle t,y\rangle \in R) \\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R. \qquad \text{(由传递性)}\end{aligned}$$

所以 $R \circ R \subseteq R$.

(充分性) 设 $R \circ R \subseteq R$. 任取 $\langle x, y\rangle \in R$, $\langle y,z\rangle \in R$, 则

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R &\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \circ R \\ &\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R.\end{aligned}$$

所以 R 是传递的. □

2.36

Theorem 27. 设 R 是集合 A 上的二元关系, 则

1. R 是对称的, 当且仅当 $R^c = R$.
2. R 是反对称的, 当且仅当 $R \cap R^c \subseteq I_A$.

只证 ② .
例如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{R^c} = M_R^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{R \cap R^c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证: 设 R 是反对称的. 假定 $\langle a, b\rangle \in R \cap R^c$, 则

$$\begin{aligned} & \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in R^c \\ \Rightarrow\ & \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, a\rangle \in R \end{aligned}$$

而 R 是反对称的, 故 $a = b$. 所以

$$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle \in I_A.$$

即 $R \cap R^c \subseteq I_A$. 证: 反之, 设 $R \cap R^c \subseteq I_A$. 对 $\langle a, b\rangle \in R$ 和 $\langle b, a\rangle \in R$, 则

$$\begin{aligned} & \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, a\rangle \in R \\ \Leftrightarrow\ & \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in R^c \\ \Leftrightarrow\ & \langle a, b\rangle \in R \cap R^c \\ \Rightarrow\ & \langle a, b\rangle \in I_A \\ \Rightarrow\ & a = b. \end{aligned}$$

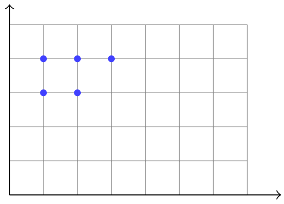
故 R 是反对称的. □

2.37

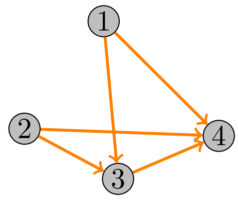
设 R 是集合 A 上的二元关系, 则

1. R 是对称的, 当且仅当 $R^c = R$.
2. R 是反对称的, 当且仅当 $R \cap R^c \subseteq I_A$.

也可以用关系矩阵直观地加以解释.
记 $M_R = (u_{ij})$, $M_{R^c} = (v_{ij})$, $M_{R \circ R^c} = (w_{ij})$.
由 $M_{R^c} = M_R^{\mathrm{T}}$, 知 $v_{ij} = u_{ji}$.
又 R 是反对称的, 知 $u_{ij} \neq u_{ji}$ $(i \neq j)$.



(a) 坐标图



(b) 关系图

则 $i \neq j$ 时,

$$\begin{aligned} w_{ij} &= u_{ij} \wedge v_{ij} \\ &= u_{ij} \wedge u_{ji} \\ &= 0. \end{aligned}$$

故 $R \cap R^c \subseteq I_A$. 例如,

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{R \cap R^c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.38

给定 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 考虑 A 上的关系 R, 若

$$R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\},$$

1. 在 $A \times A$ 的坐标图中标出 R, 并绘出它的关系图;
2. R 是 i) 自反的, ii) 对称的, iii) 传递的, iv) 反对称的吗?

解: ① 见下图.

② R 是传递的和反对称的; 不是自反或对称的. □ 2.39

4 关系的闭包

关系的闭包运算

问题: 关系可以具有自反、对称、传递等性质. 但是, 不是所有的关系都具有这些性质.

解决: 可以通过对给定的关系添加新的元素 (序偶), 使所得的新关系具有这些性质.

要求: 与此同时, 又不添加过多的元素, 做到恰到好处, 即添加的元素要最少.

对给定的关系, 用扩充一些序偶的办法, 得到具有某些性质的新关系, 这就是闭包运算. 2.40

关系的闭包运算

Definition 28. 设 R 是 A 上的二元关系, 关系 R' 是 R 的自反闭包 (对称闭包, 传递闭包), 如果

1. R' 是自反的 (对称的, 传递的);
2. $R \subseteq R'$;
3. 对任何自反的 (对称的, 传递的) 关系 R'', 如果 $R \subseteq R''$, 那么 $R' \subseteq R''$.

R 的自反、对称和传递闭包分别记为

$$r(R), \quad s(R), \quad t(R).$$

☞ R 的自反 (对称、传递) 闭包, 是包含 R 的最小自反 (对称、传递) 关系. 2.41

闭包的性质

从闭包的定义知, R 的自反闭包 (对称闭包, 传递闭包) 是包含 R 且具有自反 (对称, 传递) 性质的 “最小” 关系.

如果 R 已经具备这些性质, 那么 R 自身就是具备这些性质且包含 R 的 “最小” 关系.

于是, 有下面的定理:

Theorem 29. *设 R 是集合 A 上的关系, 那么*

1. *R 是自反的, 当且仅当 $r(R) = R$.*
2. *R 是对称的, 当且仅当 $s(R) = R$.*
3. *R 是传递的, 当且仅当 $t(R) = R$.*

下证 ② . 其他证明类似. 2.42

闭包的性质

Theorem

设 R 是集合 A 上的二元关系, 则 R 是对称的, 当且仅当 $s(R) = R$.

证: 设 R 是对称的. 则 R 满足对称闭包的定义:

1. R 是对称的;
2. $R \subseteq R$;
3. 对任何对称关系 R', 如果 $R \subseteq R'$, 那么 $R \subseteq R'$.

反之, 若 $s(R) = R$, 由对称闭包定义知 R 是对称的. □ 2.43

构造闭包的方法

设 R 是集合 A 上的二元关系, 则

1. 自反闭包 $r(R) = R \cup I_A$;
2. 对称闭包 $s(R) = R \cup R^c$;
3. 传递闭包 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots (\triangleq R^+)$.

☞ 前两个用关系矩阵很容易解释. 下面作为三个定理来逐一证明. 2.44

Theorem 30. 设 R 是集合 A 上的二元关系, 则自反闭包 $r(R) = R \cup I_A$.

分析 注意结论: S 是集合 A 上的自反关系, 当且仅当 $I_A \subseteq S$. (或见 P.119 习题 (2).)

证: 设 $R' = R \cup I_A$. 下面验证 R' 满足 "自反闭包" 的定义:

1. "R' 是自反的": 因为 $I_A \subseteq R'$.
2. "$R \subseteq R'$": 由 $R' = R \cup I_A$.
3. "对任何自反关系 R'', 如果 $R \subseteq R''$, 那么 $R' \subseteq R''$":
   设 R'' 是自反的, 则 $I_A \subseteq R''$. 如果 $R \subseteq R''$, 则
   $$R' = R \cup I_A \subseteq R''.$$

综上得证
$$r(R) = R \cup I_A.$$

□ 2.45

Theorem 31. 设 R 是集合 A 上的二元关系, 则对称闭包 $s(R) = R \cup R^c$.

证: 设 $R' = R \cup R^c$. 下面验证 R' 满足 "对称闭包" 定义:

1. "R' 是对称的":
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R' &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in R^c\\ &\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^c \vee \langle y, x\rangle \in R\\ &\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R'.\end{aligned}$$
2. "$R \subseteq R'$": 由 $R' = R \cup R^c$.
3. "对任何对称关系 R'', 如果 $R \subseteq R''$, 那么 $R' \subseteq R''$": 下证任意 $\langle x, y\rangle \in R'$, 有 $\langle x, y\rangle \in R''$:
$$\langle x, y\rangle \in R' \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in R^c,$$
   (i) $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R''$ (由 $R \subseteq R''$);
   (ii) $\langle x, y\rangle \in R^c \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R \subseteq R'' \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R''$ (由 R'' 是对称的).

综上得证 $s(R) = R \cup R^c$. □ 2.46

Theorem 32. 设 R 是集合 A 上的二元关系, 则 $t(R) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots (\triangleq R^+)$.

分析: $t(R) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i \Leftrightarrow \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)\Big) \wedge \Big(t(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i\Big)$.

证: ① 先证 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$, 用归纳法.

1. 由传递闭包定义知 $R \subseteq t(R)$;
2. 假定 $n \geqslant 1$ 时, $R^n \subseteq t(R)$. 设 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
R^{n+1} = R^n \circ R &\Leftrightarrow (\exists c)(c \in A \wedge \langle x, c\rangle \in R^n \wedge \langle c, y\rangle \in R) \\
&\Rightarrow (\exists c)\big(c \in A \wedge \langle x, c\rangle \in t(R) \wedge \langle c, y\rangle \in t(R)\big) \\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle \in t(R) \\
&\Rightarrow R^{n+1} \subseteq t(R).
\end{aligned}
$$

所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$. ② 再证 $t(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$. 由传递闭包 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系, 往下只需要证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的.

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \wedge \langle y, z\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \\
\Leftrightarrow\ & (\exists s)(\exists t)(s \in \mathbb{N} \wedge t \in \mathbb{N} \wedge \langle x, y\rangle \in R^s \wedge \langle y, z\rangle \in R^t) \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, z\rangle \in R^s \circ R^t = R^{s+t} \\
\Rightarrow\ & \langle x, z\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.
\end{aligned}
$$

得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的. 由于包含 R 的传递关系都包含 $t(R)$, 故 $t(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$. □ 2.47

Example

设 $A = \{a, b, c\}$, R 是 A 上的二元关系, $R = \big\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\big\}$. 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

解: 自反闭包:

$$
\begin{aligned}
r(R) &= R \cup I_A \\
&= \big\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\big\}.
\end{aligned}
$$

对称闭包:

$$
\begin{aligned}
s(R) &= R \cup R^{c} \\
&= \big\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle a, c\rangle\big\}.
\end{aligned}
$$

下面求传递闭包 $t(R)$. 这里

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.48

Example

设 $A = \{a,\, b,\, c\}$, R 是 A 上的二元关系, $R = \big\{\langle a,\, b\rangle,\, \langle b,\, c\rangle,\, \langle c,\, a\rangle\big\}$. 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{R^3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

注意到 $M_R = M_{R^4}$, 即 $R = R^4$. 2.49

Example

设 $A = \{a,\, b,\, c\}$, R 是 A 上的二元关系, $R = \big\{\langle a,\, b\rangle,\, \langle b,\, c\rangle,\, \langle c,\, a\rangle\big\}$. 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

由 $R = R^4$ 有:

$$\begin{aligned} R &= R^4 = \cdots = R^{3n+1}, \\ R^2 &= R^5 = \cdots = R^{3n+2}, \\ R^3 &= R^6 = \cdots = R^{3n+3}. \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} t(R) &= \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = R \cup R^2 \cup R^3 \\ &= \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle a, c\rangle\}. \end{aligned}$$

这里

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.50

Theorem 33. 设 R 是有限集合 X 上的二元关系, $\mathrm{card}(X) = n$, 则存在正整数 $k \leqslant n$, 使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k.$$

证: 设有 $x, y \in X$. 记 $t(R) = R^+$.

$$\begin{aligned} & \langle x, y\rangle \in R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots && (13)\\ \Rightarrow\ & (\exists R^p)\big(\langle x, y\rangle \in R^p\big) && (14)\\ \Leftrightarrow\ & (\exists x_{i_1})(\exists x_{i_2})\cdots(\exists x_{i_{p-1}})\big(xRx_{i_1} \wedge x_{i_1}Rx_{i_2} \wedge \cdots x_{i_{p-1}}Ry\big) && (15) \end{aligned}$$

假设满足上述条件的最小 p 大于 n. 则在 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{p-1}}$ 当中必存在相同的元素. 即存在 $0 \leqslant t < q \leqslant p$, 使 $x_{i_t} = x_{i_q}$. 则 x 到 y 的"复合路径"

$$xRx_{i_1}, x_{i_1}Rx_{i_2}, \cdots, x_{i_{t-1}}Rx_{i_t}, x_{i_t}Rx_{i_{t+1}}, \cdots, x_{i_q}Rx_{i_{q+1}}, \cdots, x_{i_{p-1}}Ry \qquad (16)$$

可简化为

$$xRx_{i_1}, x_{i_1}Rx_{i_2}, \cdots, x_{i_{t-1}}Rx_{i_t}, x_{i_q}Rx_{i_{q+1}}, \cdots, x_{i_{p-1}}Ry \qquad (17)$$

这与 p 是最小的假设矛盾, 故 $p > n$ 不成立. □ 2.51

Theorem

设 R 是有限集合 X 上的二元关系, $\mathrm{card}(X) = n$, 则存在正整数 $k \leqslant n$, 使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k.$$

☞ 从本定理可以知道, 在 n 个元素的有限集上关系 R 的传递闭包可以改写为

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n, \qquad (18)$$

而不必再使用

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots. \qquad (19)$$

2.52

利用关系矩阵求闭包

Theorem 34. 设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s, M_t, 则

1. $M_r = M + I$;
2. $M_s = M + M^{\mathrm{T}}$;
3. $M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$;

2.53

Warshall 算法 (1962)

Warshall 提出了求 R^+ 的一个有效算法:[2]

Step 1 置新矩阵 $A := M$;

Step 2 置 $i := 1$;

Step 3 对所有 j, 如果 $A[j,\, i] = 1$, 则对 $k = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$,

$$A[j,\, k] := A[j,\, k] + A[i,\, k] \tag{20}$$

Step 4 $i := i + 1$;

Step 5 如果 $i \leqslant n$, 则转到 **Step 3**; 否则停止.

这里, $A[j,\, i]$ 表示矩阵中第 j 行, 第 i 列的元素. 加法是逻辑加. 2.54

如何理解?

Step 3 对所有 j, 如果 $A[j,\, i] = 1$, 则对 $k = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$,

$$A[j,\, k] := A[j,\, k] + A[i,\, k]$$

若 $A[j,\, i] = 1$, 即已有 x_j 到 x_i 的关系. 接下来的问题:

x_j 是否存在到 x_k 的关系呢?

1. 如果 x_j 到 x_k 已经存在关系, 则 $A[j,\, k] = 1$, 赋值 $A[j,\, k] := A[j,\, k] + A[i,\, k]$ 不会改变 $A[j,\, k]$ 的值.
2. 如果 x_j 到 x_k 没有关系, 由已有的 x_j 到 x_i 的关系, 现在看是否有 x_j 通过 x_i 再到 x_k 的 (复合) 关系.
    - 如果 $A[i,\, k] = 1$, 则 $A[j,\, k]$ 获得新值 1. 即通过关系的复合运算, 可以建立 x_j 到 x_k 的关系;
    - 而若 $A[i,\, k] = 0$, 则 $A[j,\, k]$ 仍为 0.

总之, 赋值 $A[j,\, k] := A[j,\, k] + A[i,\, k]$ 就是为了建立 x_j 到 x_k 的可能关系. 2.55

如何理解?

Step 3 对所有 j, 如果 $A[j,\, i] = 1$, 则对 $k = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$,

$$A[j,\, k] := A[j,\, k] + A[i,\, k]$$

若 $A[j,\, i] = 1$, 即已有 x_j 到 x_i 的关系. 接下来的问题:

x_j 是否存在到 x_k 的关系呢?

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A[i,\, 1] & A[i,\, 2] & & A[i,\, i] & \cdots & A[i,\, n] \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A[j,\, 1] & A[j,\, 2] & \cdots & \boxed{1} & \cdots & A[j,\, n] \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

[2] Stephen Warshall. A theorem on Boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9(1):11-12, January 1962.

直观地看, 就是把第 i 行的值, “叠加” 到第 j 行的对应位置.

比如, 若 $A[i, 1] = 1$, $A[j, 1] = 0$. 可以得到新值 $A[j, 1] = 1$. 2.56

如何理解?

Step 3 对所有 j, 如果 $A[j, i] = 1$, 则对 $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$A[j, k] := A[j, k] + A[i, k]$$

若 $A[j, i] = 1$, 即已有 x_j 到 x_i 的关系. 接下来的问题:
x_j 是否存在到 x_k 的关系呢?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A[i, 1] & A[i, 2] & & A[i, i] & \cdots & A[i, n] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A[j, 1] & A[j, 2] & \cdots & \boxed{1} & \cdots & A[j, n] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

注意循环是从 i 开始, 即逐列进行的. 实际操作:
逐列进行. 在第 i 列中若有 $A[j, i] = 1$, 则把第 i 行叠加到第 j 行. 2.57

Example 35. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$, 用 Warshall 算法求 $t(R)$.

解: 对关系矩阵逐列使用 Warshall 算法:

$$A := M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal[r_2+r_1]{A[2,1]=1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{A[1,2]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2+r_2]{A[2,2]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal[r_1+r_3]{A[1,3]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal[r_2+r_3]{A[2,3]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+r_4]{A[1,4]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal[r_2+r_4]{A[2,4]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal[r_3+r_4]{A[3,4]=1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从解题中, 我们容易发现一点规律:

1. 主对角线上的元, 可以不用理会.
2. 若 $A[j, i] = 1$, 而第 i 行的元素全为零, 也可以跳过此处. 2.58

利用关系图求闭包

记 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别为 G, G_r, G_s, G_t.

- 考察 G 的每个结点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到的是 G_r;
- 考察 G 的每一条边, 如果 x_i 到 x_j 有一条单向边, 则增加一条反方向边, 最终得到 G_s;
- 考察 G 的每个顶点,
  - 若 x_i 有到 x_j 的 "间接路径", 就添加从 x_i 到 x_j 的直接连线.
  - 若从 x_i 出发, 能回到 x_i, 则在 x_i 应有一个环.

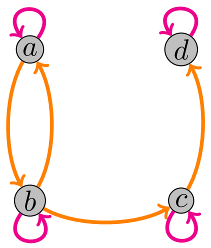
  最终得到 G_t.

2.59

Example 36. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$, 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

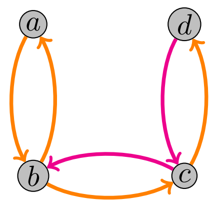
解: $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图和关系矩阵如下.

① G_r 和 $M_{r(R)}$:



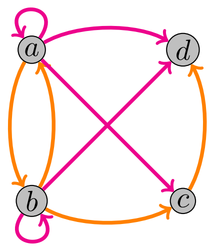
$$M_{r(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

② G_s 和 $M_{s(R)}$:



$$M_{s(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

③ G_t 和 $M_{t(R)}$:



$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.60

Theorem 37. *设 R 是 X 上的二元关系, 则*

1. $rs(R) = sr(R)$;
2. $rt(R) = tr(R)$;
3. $st(R) \subseteq ts(R)$;

证: ① 令 I_X 表示 X 上的恒等关系,

$$\begin{aligned}
sr(R) &= s\big(I_X \cup R\big) && (r(R) = I_X \cup R)\\
&= \big(I_X \cup R\big) \cup \big(I_X \cup R\big)^{\mathrm{c}} && (s(R) = R \cup R^{\mathrm{c}})\\
&= \big(I_X \cup R\big) \cup \big(I_X^{\mathrm{c}} \cup R^{\mathrm{c}}\big) &&\\
&= I_X \cup R \cup R^{\mathrm{c}} && (I_X^{\mathrm{c}} = I_X)\\
&= I_X \cup s(R) && (R \cup R^{\mathrm{c}} = s(R))\\
&= rs(R) && (I_X \cup R = r(R))
\end{aligned}$$

证: ②

$$\begin{aligned}
tr(R) = t(R \cup I_X) &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (R \cup I_X)^i\\
&= \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_X \cup \bigcup_{j=1}^{i} R^j)\\
&= I_X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i\\
&= I_X \cup t(R) = rt(R).
\end{aligned}$$

注意等式: $(R \cup I_X)^i = I_X \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^i$. 2.61

证明:

$$(R \cup I_X)^i = I_X \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^i. \tag{21}$$

证: 用归纳法证明.

当 $i = 1$ 时, (21) 式显然成立.

当 $i = 2$ 时, 注意到 $I_X \circ R = R = R \circ I_X$,

$$\begin{aligned}
(R \cup I_X)^2 &= (R \cup I_X) \circ (R \cup I_X) = (R \cup I_X) \circ R \cup (R \cup I_X) \circ I_X\\
&= (R \circ R \cup R) \cup (R \cup I_X) = R^2 \cup R \cup I_X.
\end{aligned}$$

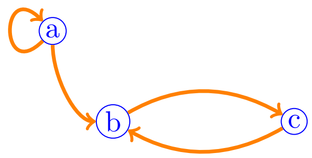
假设当 $i = k$ 时成立. 当 $i = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
(R \cup I_X)^{k+1} &= (R \cup I_X)^k \circ (R \cup I_X)\\
&= (R^k \cup \cdots \cup R^2 \cup R \cup I_X) \circ (R \cup I_X)\\
&= \big((R^k \cup \cdots \cup R^2 \cup R \cup I_X) \circ R\big) \cup \big((R^k \cup \cdots \cup R^2 \cup R \cup I_X) \circ I_X\big)\\
&= (R^{k+1} \cup R^k \cup \cdots \cup R^2 \cup R) \cup (R^k \cup \cdots \cup R^2 \cup R \cup I_X)\\
&= R^{k+1} \cup R^k \cup \cdots \cup R^2 \cup R \cup I_X.
\end{aligned}$$

所以当 $i = k + 1$ 时 (21) 式成立. □ 2.62

习题

根据图中的有向图，写出邻接矩阵和关系 R，并求出 R 的自反闭包和对称闭包.



解:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} R &= \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}, \\ r(R) &= \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}, \\ s(R) &= \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}. \end{aligned}$$

2.63

习题

设 R_1, R_2 为非空集合 A 上的关系，且 $R_1 \supseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \supseteq r(R_2)$;
2. $s(R_1) \supseteq s(R_2)$;
3. $t(R_1) \supseteq t(R_2)$.

证: ① 因 $R_1 \supseteq R_2$，故 $R_1 \cup I_A \supseteq R_2 \cup I_A$，即

$$r(R_1) \supseteq r(R_2).$$

② 由 $s(R_1) \supseteq R_1$，又 $R_1 \supseteq R_2$，所以 $s(R_1) \supseteq R_2$. 又 $s(R_1)$ 是对称的，而 $s(R_2)$ 是包含 R_2 的最小对称关系，所以

$$s(R_1) \supseteq s(R_2).$$

③ 由 $t(R_1) \supseteq R_1$，又 $R_1 \supseteq R_2$，所以 $t(R_1) \supseteq R_2$. 又 $t(R_1)$ 是传递的，而 $t(R_2)$ 是包含 R_2 的最小传递关系， 所以 $t(R_1) \supseteq t(R_2)$. □ 2.64

5 等价关系与等价类

等价关系 (equivalence relation)

等价关系是一类重要的二元关系.

Definition 38 (等价关系)**.** 设 R 为非空集合 A 上的二元关系，称 R 为 A 上的等价关系，如果 R 是

1. 自反的,
2. 对称的,
3. 传递的.

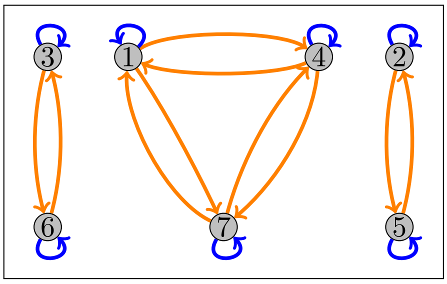
例如, 三角形的全等关系、相似关系, 数的相等关系, 命题逻辑中等价关系都是等价关系. 2.65

Example 39. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbb{Z}$ 为整数集合, A 上的关系 R 定义为:

$$R = \big\{\langle x,\, y\rangle \bigm| x, y \in A \wedge (x - y)/3 \in \mathbb{Z}\big\}.$$

说明 R 是等价关系.

解: $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 7,1\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 7,4\rangle\}$, 显然 R 是自反的, 对称的和传递的, 因此 R 是等价关系. R 的关系图如下:



2.66

Example 40. 设 R 为整数集合 $\mathbb{Z}$ 上的关系, k 为正整数, 令

$$R = \big\{\langle x,\, y\rangle \bigm| x, y \in \mathbb{Z} \wedge x \equiv y \pmod{k}\big\}.$$

称 R 为模 k 同余关系, 并称 x 与 y 模 k 相等. 证明 R 是等价关系.

证: 设任意 $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

1. 因 $(a - a)/k = 0$, 故 $\langle a, a\rangle \in R$, 即 R 是自反的.
2. 若 $\langle a, b\rangle \in R$, 可令 $a - b = kt$ (t 为整数), 则 $b - a = -kt$, 所以
$$b \equiv a \pmod{k}.$$
3. 若 $\langle a, b\rangle \in R$, $\langle b, c\rangle \in R$, 可令 $a - b = kt$, $b - c = ks$ (其中 t, s 为整数), 那么 $a - c = (a - b) + (b - c) = k(t + s)$, 即
$$a \equiv c \pmod{k}.$$
故 $\langle a, c\rangle \in R$.

综上所述, R 是等价关系. □ 2.67

等价类 (equivalence class)

Definition 41 (等价类)**.** 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall a \in A$, 令

$$[a]_R = \{x \mid x \in A \wedge aRx\}. \tag{22}$$

称 $[a]_R$ 为 a 关于 R 的等价类. 简称为 a 的等价类, 简记为 $[a]$.

2.68

Example 42. 设 $A = \{a, b, c\}$, 求等价关系

$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$$

的所有等价类.

解:

$$[a] = \{a\},$$
$$[b] = [c] = \{b, c\}.$$

2.69

Theorem 43. 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall a, b \in A$,

$$aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R. \tag{23}$$

证: ① 若 aRb, 任取 $c \in [a]_R$,

$$c \in [a]_R \Rightarrow aRc \Rightarrow cRa \Rightarrow cRb \Rightarrow bRc \Rightarrow c \in [b]_R,$$

故

$$[a]_R \subseteq [b]_R.$$

同理可证 $[b]_R \subseteq [a]_R$. 故 $[a]_R = [b]_R$.

② 反之, 若 $[a]_R = [b]_R$, 则

$$a \in [a]_R \Rightarrow a \in [b]_R \Rightarrow bRa \Rightarrow aRb.$$

□

2.70

商集

集合 A 上的等价关系 R 将 A 划分为等价类, 以等价类作元素, 得到新的集合, 称为 A 关于 R 的商集.

Definition 44. 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 集合 $\{[a]_R \mid a \in A\}$ 称为 A 关于 R 的商集 (quotient set), 记作 A/R.

2.71

Example 45. 设 $A = \{a, b, c\}$, R 为等价关系:

$$R = \big\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\big\},$$

则 A 关于 R 的商集为:

$$\begin{aligned} A/R &= \{[a], [b], [c]\} \\ &= \big\{\{a\}, \{b, c\}\big\}. \end{aligned}$$

2.72

Theorem 46. 集合 A 上的等价关系 R, 决定了 A 的一个划分, 该划分就是商集 A/R.

证:

1. $A/R = \big\{[a]_R \mid a \in A\big\}$, 显然
$$\bigcup_{a\in A} [a]_R = A.$$
2. 对 $\forall a \in A$, 有 $a \in [a]_R$, 所以 A 中的每个元素都属于某个分块.
3. 下面证明 A 中的任一个元素仅属于某一个分块.
设 $\forall a \in A$, $a \in [b]_R$ 且 $a \in [c]_R$, 那么
$$bRa, \quad cRa.$$
因 R 对称, 所以 aRc. 又因 R 是传递的, 所以 bRc. 从而
$$[b]_R = [c]_R.$$

综上所述, A/R 是 A 关于 R 的一个划分. □ 2.73

Theorem 47. 集合 A 的一个划分确定 A 的元素间的一个等价关系.

证: 设集合 A 有一个划分 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$, 定义关系 R 为

$$R = \big\{\langle x, y\rangle \mid x, y \text{ 在同一分块中}\big\}.$$

1. 任意 $a \in A$, 由 a 与 a 属于同一分块, 得 $\langle a, a\rangle \in R$, 故 R 是自反的.
2. 若 $\langle a, b\rangle \in R$, 则 a 与 b 属于同一分块, 当然 b 与 a 也属于同一分块, 所以 $\langle b, a\rangle \in R$. 即 R 是对称的.
3. 若 $\langle a, b\rangle \in R$, $\langle b, c\rangle \in R$, 设 a, b 同属于分块 A_i, b, c 同属于分块 A_j. 由划分的定义, 当 $i \neq j$ 时,
$$A_i \cap A_j = \varnothing,$$
但 b 只能属于一个分块, 所以 $A_i = A_j$. 于是 a, c 属于同一分块, 即 $\langle a, c\rangle \in R$, 故 R 是传递的.

综上, R 是 A 上的等价关系. □ 2.74

Example 48. 设 $A = \{a, b, c, d, e\}$, A 有一个划分 $S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$, 试写出划分 S 所确定的 A 上的等价关系.

解: 令关系 R 为:

$$\begin{aligned} R &= \{\langle x, y\rangle \mid x, y \text{ 在同一分块中}\} \\ &= A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \cdots \cup A_k \times A_k. \end{aligned}$$

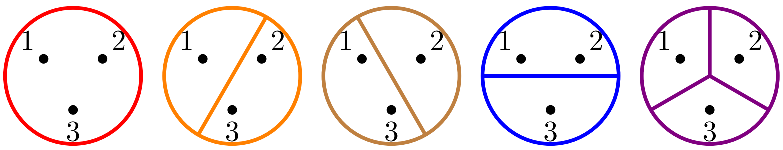
则 R 为 A 上的等价关系. 所以有如下的等价关系:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}, \\ R_2 &= \{c\} \times \{c\} = \{\langle c, c\rangle\}, \\ R_3 &= \{d, e\} \times \{d, e\} = \{\langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}, \\ R &= R_1 \cup R_2 \cup R_3 \\ &= \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, e\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle\}. \end{aligned}$$

2.75

Example 49. 求出集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的所有等价关系.

解: 因 A 的所有划分如下图所示:



A 上的所有等价关系就是上述 5 种划分对应的等价关系, 它们依次为 E_A, R_2, R_3, R_4, I_A, 其中

$$\begin{aligned} E_A &= A \times A, && \text{(全域关系)} \\ I_A &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}, && \text{(恒等关系)} \\ R_2 &= \{\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\} \cup I_A, \\ R_3 &= \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\} \cup I_A, \\ R_4 &= \{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\} \cup I_A. \end{aligned}$$

2.76

Theorem 50. 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的两个等价关系, $R_1 = R_2$ 当且仅当 $A/R_1 = A/R_2$.

证: ① 若 $R_1 = R_2$, 因 $A/R_1 = \{[a]_{R_1} \mid a \in A\}$, $A/R_2 = \{[a]_{R_2} \mid a \in A\}$. 对任意 $a \in A$,

$$[a]_{R_1} = \{x \mid x \in A, aR_1x\} = \{x \mid x \in A, aR_2x\} = [a]_{R_2}.$$

所以 A/R_1 和 A/R_2 中的元素相同, 即 $A/R_1 = A/R_2$.

② 反之, 若 $A/R_1 = A/R_2$, 则对任意 $[a]_{R_1} \in A/R_1$, 必有 $[c]_{R_2} \in A/R_2$, 使得 $[a]_{R_1} = [c]_{R_2}$. 所以, 对任意 $\langle a, b\rangle \in R_1$, 有

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle \in R_1 &\Leftrightarrow a \in [a]_{R_1} \wedge b \in [a]_{R_1}\\ &\Leftrightarrow a \in [c]_{R_2} \wedge b \in [c]_{R_2}\\ &\Rightarrow \langle a, b\rangle \in R_2.\end{aligned}$$

得 $R_1 \subseteq R_2$. 同理可证 $R_2 \subseteq R_1$. 所以 $R_1 = R_2$. □ 2.77

6 相容关系

相容关系

Definition 51 (相容关系)**.** 集合 A 上的二元关系 r 称为相容关系, 如果 r 是

1. 自反的,
2. 对称的.

相容关系也可能满足传递性. 或者说, 等价关系也是相容关系.

相容关系也常称为相似关系 (similarity relation). 2.78

Example 52. 设集合 $A = \{\text{cat, teacher, cold, desk, knife, by}\}$, 定义关系:

$$r = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \text{ 且 } x \text{ 和 } y \text{ 有相同的字母}\}.$$

显然 r 是一个相容关系.

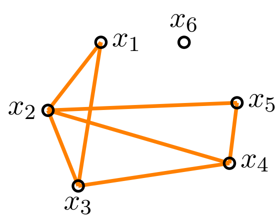
令 $x_1 = \text{cat}$, $x_2 = \text{teacher}$, $x_3 = \text{clod}$, $x_4 = \text{desk}$, $x_5 = \text{knife}$, $x_6 = \text{by}$. 则 r 的关系矩阵为

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意到相容关系矩阵的对称性和对角线元素都是 1, 可将矩阵用梯形表示.

$$M_r : \begin{array}{c|ccccc} x_2 & 1 & & & & \\ x_3 & 1 & 1 & & & \\ x_4 & 0 & 1 & 1 & & \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

关系图也可以得到相应的简化:

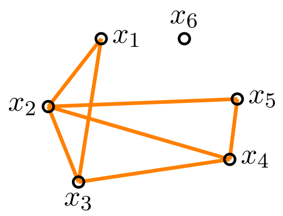


2.79

相容类

Definition 53 (相容类)**.** 设 r 是集合 A 上的相容关系, C 是 A 的子集. 如果对于 C 中任意两个元素 a_1, a_2 有 $a_1 r a_2$, 则称 C 是由相容关系 r 产生的相容类.

Example 54.



如图的相容关系 r 可产生相容类 $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$ 等等.

对于前三个相容类, 都能加进新的元素组成新的相容类, 而后两个相容类, 加入任一新元素, 就不再组成相容类, 我们称它为最大相容类.

2.80

最大相容类

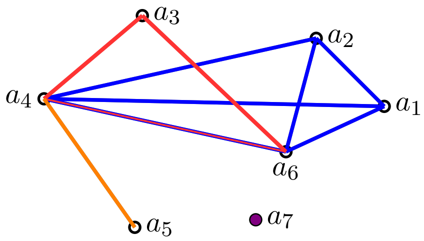
Definition 55 (最大相容类)**.** 设 r 是集合 A 上的相容关系, 不能真包含在任何其它相容类中的相容类, 称作最大相容类. 记作 C_r.

Remark

1. $\forall x \in C_r \Rightarrow (\exists y \in C_r)(x C_r y)$; $\forall x \in C_r \Rightarrow \neg(\exists z \in A - C_r)(x C_r z)$.
2. 在相容关系图中, 最大完全多边形的顶点集合, 就是最大相容类.
3. 在相容关系图中, 孤立结点, 以及不是完全多边形的两个结点的连线, 也是最大相容类.

2.81

Example 56. 设给定相容关系如图所示, 写出最大相容类.



解: 最大相容类为:

$$\{a_1, a_2, a_4, a_6\}, \quad \{a_3, a_4, a_6\}, \quad \{a_4, a_5\}, \quad \{a_7\}.$$

2.82

Theorem 57. 设 r 是有限集 A 上的相容关系, C 是一个相容类, 那么必存在一个最大相容类 C_r, 使得 $C \subseteq C_r$.

证: 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 构造相容类序列

$$C_0\subset C_1\subset C_2\subset\cdots,\quad 其中\ C_0=C.$$

且 $C_{i+1}=C_i\cup\{a_j\}$, 这里 j 是满足 $a_j\notin C_i$ 而 a_j 与 C_i 中各元素都有相容关系的最小足标.

由于 A 的元素个数 $\mathrm{card}(A)=n$, 所以至多经过 $n-\mathrm{card}(C)$ 步, 就使这个过程终止, 而此序列的最后一个相容类, 就是所要找的最大相容类. □ 2.83

完全覆盖

☞ $\forall a\in A$ 可以组成相容类 $\{a\}$, 由前述定理可知, $\{a\}$ 必包含在一个最大相容类 C_r 中,

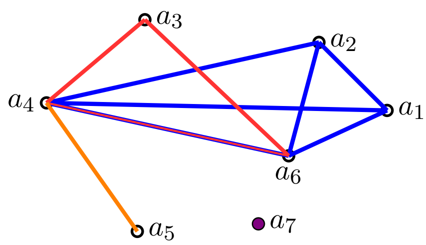
因此, 若由所有最大相容类作出一个集合, 则 A 中每一元素至少属于该集合的一个成员之中, 所以最大相容类集合必覆盖集合 A.

Definition 58. 在集合 A 上给定相容关系 r, 其最大相容类的集合, 称作集合 A 的*完全覆盖*, 记作 $C_r(A)$. 2.84

完全覆盖

1. 集合 A 的覆盖不是惟一的, 因此给定相容关系 r, 可以作成不同的相容类的集合, 它们都是 A 的覆盖.
2. 但给定相容关系 r, 只能对应惟一的完全覆盖. 例如图中的相容关系 r 有惟一的完全覆盖:

$$\big\{\{a_1,\,a_2,\,a_4,\,a_6\},\,\{a_3,\,a_4,\,a_6\},\,\{a_4,\,a_5\},\,\{a_7\}\big\}.$$



2.85

Theorem 59. *给定集合 A 的覆盖 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, 由它确定的关系*

$$r=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\cdots\cup A_n\times A_n$$

是相容关系.

证: 因为 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, $\forall x\in A$, $\exists j>0$ 使得 $x\in A_j$, 则 $\langle x,\,x\rangle\in A_j\times A_j$.
又 $r=\bigcup\limits_{i=k}^{n}A_k\times A_k$, 所以

$$\langle x,\,x\rangle\in r.$$

即 r 是自反的.

其次, $\forall x,y\in A$ 且 $\langle x,\,y\rangle\in r$, $\exists h>0$ 使 $\langle x,\,y\rangle\in A_h\times A_h$, 故必有

$$\langle y,\,x\rangle\in A_h\times A_h,$$

即 $\langle y,\,x\rangle\in r$, 所以 r 是对称的.

得证 r 是 A 上的相容关系. □

2.86

Theorem

给定集合 A 的覆盖 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, 由它确定的关系

$$r=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\cdots\cup A_n\times A_n$$

是相容关系.

☞ 给定集合 A 上的任意一个覆盖, 必可在 A 上构造对应于此覆盖的一个相容关系. 但是不同的覆盖却能构造相同的相容关系.

Example 60. 设 $A=\{1,2,3,4\}$, 集合 $\{\{1,2,3\},\,\{3,4\}\}$ 和 $\{\{1,2\},\,\{2,3\},\,\{1,3\},\,\{3,4\},\,\}$ 都是 A 的覆盖, 但它们可以产生相同的相容关系:

$$\begin{aligned}r=\{&\langle 1,\,1\rangle,\,\langle 1,\,2\rangle,\,\langle 2,\,1\rangle,\,\langle 2,\,2\rangle,\,\langle 2,\,3\rangle,\,\langle 3,\,2\rangle,\\&\langle 1,\,3\rangle,\,\langle 3,\,1\rangle,\,\langle 3,\,3\rangle,\,\langle 4,\,4\rangle,\,\langle 3,\,4\rangle,\,\langle 4,\,3\rangle\}.\end{aligned}$$

2.87

7 序关系

序

序 (order), 指一类定义在非空集 A 上, 以满足传递性为基本条件的二元关系, 它是通常的实数之间大小次序概念的推广.

在实数系中, 两个实数之间的 “小于或等于” 关系 (记为 $\leqslant$) 是一种序, 它满足:

1. 自反性: $a\leqslant a$;
2. 反对称性: 若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$, 则 $a=b$.
3. 传递性: 若 $a\leqslant b$, $b\leqslant c$, 则 $a\leqslant c$.
4. 强连结性: 任给 a, b, 则 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$ 中至少有一个成立.

☞ 一般说来, 如果任何集合 A 上存在二元关系 (记为 $\preccurlyeq$),

- 能满足上述 ① ∼ ④ , 则称 A 上有一全序关系 $\preccurlyeq$, A 为全序集;
- 只满足 ① , ② , ③ 的, 称为偏序.

2.88

偏序 (partial-ordering)

Definition 61. 如果集合 A 上的二元关系 R 是自反的、反对称的和传递的, 那么称 R 为 A 上的偏序关系 (或偏序). 称序偶 $\langle A, R\rangle$ 为偏序集 (partially ordered set, 或 poset).

- 偏序, 又称半序 (semi-ordering).
- 如果 R 是偏序关系, $\langle A, R\rangle$ 常记为 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$. "$\preccurlyeq$" 是序关系符号, 读作 "小于或者等于".
- R 是偏序时, aRb 就记为 $a \preccurlyeq b$.

Example 62. • 在任意实数集 A 中, 以大小关系 $\leqslant$ 为序, 即 $\langle A, \leqslant\rangle$ 是偏序集;

- 集合 A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 中, 以包含关系"$\subseteq$" 为序, 即 $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq\rangle$ 是偏序集;
- 在正整数集中, 以整除为序, 得到一个偏序集.

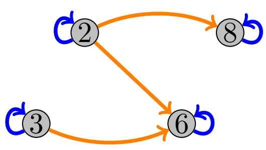
2.89

Example 63. 给定集合 $A = \{2, 3, 6, 8\}$, 令 "$\preccurlyeq$"$= \big\{\langle x, y\rangle \bigm| x$ 整除 $y\big\}$. 验证 "$\preccurlyeq$" 是偏序关系.

解: 集合 $A = \{2, 3, 6, 8\}$ 上的整除关系为

$$\preccurlyeq = \big\{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 2, 8\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 6, 6\rangle, \langle 8, 8\rangle\big\}.$$

关系矩阵和关系图如下:[2ex] $M_{\preccurlyeq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$



从关系矩阵和关系图可以看出 "$\preccurlyeq$" 是自反、反对称和传递的, 所以是偏序关系.

注意: 偏序集中的任意两个元素之间, 并不一定都具有偏序关系. 例如 2 不整除 3, 此时称 2 和 3 不可比. 2.90

也可以一般地证明这个问题:

Example 64. 令 $A \subseteq \mathbb{N}^+$, 对任意 $m, n \in A$, $m \big| n$ 表示 m 整除 n 的关系 (即 n 为 m 的整数倍: 存在整数 k 满足 $n = km$), 试证 $\langle A, \big|\rangle$ 是偏序集.

证: 即要证整除关系具有自反性, 反对称性, 传递性.

1. 自反性: $(\forall m)(m \in A \to m \big| m)$;
2. 反对称性: $(\forall m)(\forall n)\big((m \big| n) \wedge (n \big| m) \to (m = n)\big)$;
3. 传递性:

$$(\forall m)(\forall n)(\forall k)\Big((m \big| n) \wedge (n \big| k) \to (\exists u)(\exists v)\big((k = un) \wedge (n = vm)\big)\Big)$$

$$\Rightarrow (\forall m)(\forall n)(\forall k)\big((m \big| n) \wedge (n \big| k) \to (m \big| k)\big)$$

□ 2.91

顶点的“盖住”关系

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性, 可以简化一个偏序关系的关系图, 得到偏序集的哈斯图.

为了说明哈斯图的画法, 首先定义偏序集中顶点的盖住关系.

Definition 65. 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集, $\forall x, y \in A$, 如果 $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 盖住 x. 并且记

$$\mathrm{COV}A = \big\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A;\ y \text{ 盖住 } x\big\}. \tag{24}$$

☞ 通俗地讲, 序关系 “$\preccurlyeq$” 是指集合中元素之间的顺序性.

- “$x \preccurlyeq y$” 的含义是: 依照这个顺序, “x 排在 y 的前面” 或 “x 就是 y, 是同一个元素”.
- 而所谓 “y 盖住 x”, 是指 “x 紧排在 y 的前面”. (还有别的元素也能紧排在 y 的前面吗?)

2.92

顶点的“盖住”关系

Example 66. 对集合 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 上的整除关系, 有

- 2 盖住 1;
- 4 和 6 都盖住 2;
- 但 4 不盖住 1, 因为有 $1 \preccurlyeq 2 \preccurlyeq 4$;
- 6 也不盖住 4, 因为 $4 \preccurlyeq 6$ 不成立.

则

$$\mathrm{COV}A = \big\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle\big\}.$$

☞ 可见, 在偏序关系中, 把 “盖住” 仅仅理解为 “紧排在前面”, 是不全面的.

哈斯图是把元素按 “层” 来排列, 紧排在 2 后面的 4 和 6 就处在同一层. 2.93

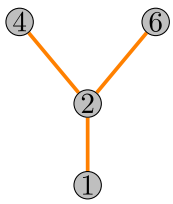
偏序集合的哈斯 (Hasse[3]) 图表示

哈斯图的作法

设有偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$, $\forall x, y \in A$ $(x \neq y)$, 适当排列结点的顺序使得:

1. 若 $x \preccurlyeq y$, 则将 x 画在 y 的下方.
2. 如果 y 盖住 x, 则用一条直线连接 x 和 y.

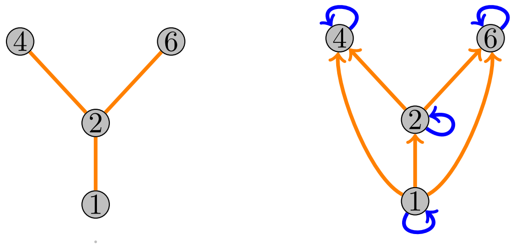
对集合 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 上的整除关系, 有哈斯图



2.94

注意哈斯图与关系图的不同. 哈斯图表达的是 “盖住” 关系, 即 $\mathrm{COV}A$.

[3] Helmut Hasse, 1898 — 1979, 德国数学家.



(a) 哈斯图 (b) 关系图

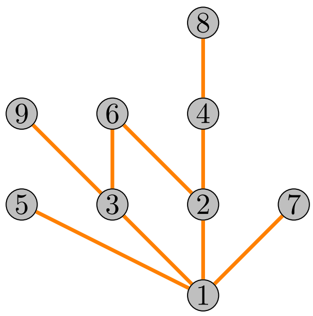
Example 67. 对集合 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 上的整除关系, 哈斯图表示的是

$$\mathrm{COV}A = \big\{\langle 1,\ 2\rangle,\ \langle 2,\ 4\rangle,\ \langle 2,\ 6\rangle\big\}.$$

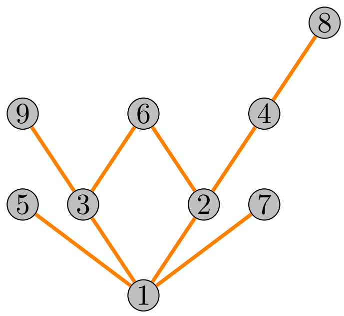
哈斯图中: 无环, 无 "第三边", 不使用箭头, 更无双边 (与关系图的区别); 无水平边 (同层次元素不可比). 2.95

Example 68. 画出偏序集 $\big\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{\text{整除}}\big\rangle$ 的哈斯图.

解: 其哈斯图如下:

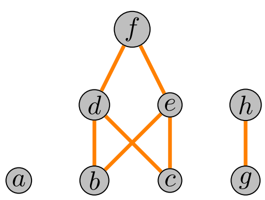


或者



2.96

Example 69. 已知偏序集 $\langle A,\ R\rangle$ 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解: 集合 A 为

$$A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}.$$

注意到哈斯图中有 7 条边, 又注意到偏序关系的传递性, 得

$$R = \big\{\langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle b, f\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, f\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \langle g, h\rangle\big\}. \tag{25}$$

☞ 这里 (25) 式是正确解答吗? 注意不要遗漏了偏序关系的自反性, 正解:

$$R=\{\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle\}\cup I_A. \qquad (26)$$

如果问题是要我们由哈斯图求关系图, 也要注意同样的问题. □ 2.97

链

Definition 70. 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集,

1. 在 A 的一个子集中, 如果每两个元素都是有关系的, 则称这个子集为链 (chain).
2. 在 A 的一个子集中, 如果每两个元素都是无关的, 则称这个子集为反链.

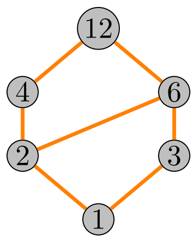
☞ 通俗地讲, 链中的每两个元素都是可比的; 反链中的每两个元素都是不可比的. 约定: 若 A 的子集只有单个元素, 则这个子集既是链又是反链. 2.98

链

Example 71. 设 A 是正整数 $m=12$ 的因子的集合, 并设 $\preccurlyeq$ 为整除关系. 求 COVA.

解: 集合 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$, 且

$$\mathrm{COV}A=\{\langle 1,2\rangle,\ \langle 1,3\rangle,\ \langle 2,4\rangle,\ \langle 2,6\rangle,\ \langle 3,6\rangle,\ \langle 4,12\rangle,\ \langle 6,12\rangle\}.$$



- 子集 $\{1,2,4,12\}$, $\{1,3,6,12\}$, $\{1,2,6,12\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,6\}$ 都是链;
- 子集 $\{2,3\}$, $\{3,4\}$ 都是反链;
- 子集 $\{1,2,3,6\}$ 既不是链, 也不是反链.

☞ 在哈斯图上, 链中的元素分布在沿盖住方向的一条线上. 2.99

全序集合

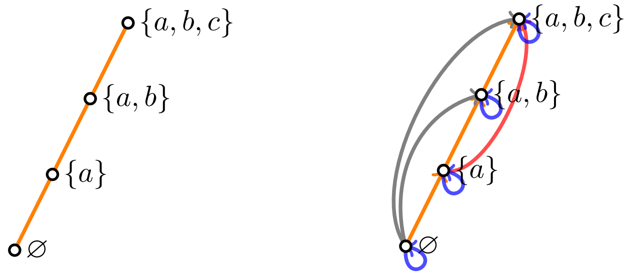
Definition 72. 在偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中, 如果 A 是一个链, 则

- 称 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 为全序集合 (totally ordered set) 或线序集合 (linearly ordered set);
- 二元关系 $\preccurlyeq$ 称为 A 上的全序关系 (或线序关系).

☞ 所谓 "全序", 就是在自反、反对称、传递的基础上, 添加了可比性 (强连结性), 即

$$(\forall a)(\forall b)\big((a,\, b\in A)\to(a\preccurlyeq b)\vee(b\preccurlyeq a)\big).$$

自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$, 有理数集 $\mathbb{Q}$, 实数集 $\mathbb{R}$ 上的 $\leqslant$ 关系, 就是全序概念的起源. 2.100



(a) 哈斯图　　　　(b) 关系图

Example 73. 给定 $A = \big\{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\big\}$ 上的包含关系 $\subseteq$, 证明 $\langle A, \subseteq\rangle$ 是全序集合.

解: 包含关系 $\subseteq$ 显然是自反的, 反对称和传递的, 所以 $\langle A, \subseteq\rangle$ 是偏序集. 而且 A 中任意两个元素都可比:

$$\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}.$$

所以 $\langle A, \subseteq\rangle$ 是全序集合. 2.101

极大、极小元; 最大、最小元

Definition 74. 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, 对 $b \in B$,

1. 如果 B 中没有任何元素 x, 满足 $b \neq x$ 且 $b \preccurlyeq x$, 则称 b 为 B 的极大元 (maximal element);
2. 如果 B 中没有任何元素 x, 满足 $b \neq x$ 且 $x \preccurlyeq b$, 则称 b 为 B 的极小元 (minimal element).

☞ b 为 B 的极小元: 如果 B 中不存在任何小于 b 的元素, 即 b 小于 B 中任何异于 b 且与 b 可比较的元素. 用符号表达如下:

$$(\forall x \in B)\big(x \preccurlyeq b \to x = b\big).$$

b 为 B 的极大元, 用符号表达如下:

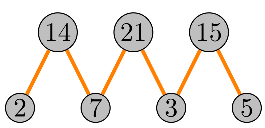
$$(\forall x \in B)\big(b \preccurlyeq x \to x = b\big).$$

2.102

极大、极小元; 最大、最小元

Example 75. 设 $A = \{2, 3, 5, 7, 14, 15, 21\}$. 偏序集为 $\langle A, \mid\rangle$. 求 $B = \{2, 3, 7, 14, 21\}$ 的极大元和极小元.

解: $\langle A, \mid\rangle$ 的哈斯图如下:



B 的极小元集合是 $\{2, 7, 3\}$, B 的极大元集合是 $\{14, 21\}$. □

- 极大元是哈斯图中最末端的元素;
- 极小元是哈斯图中最底层的元素;
- 不同的极小元 (极大元) 之间是无关的, 是不可比的.

2.103

极大、极小元; 最大、最小元

Definition 76. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, 对 $b \in B$,

1. 对于 B 中每一个元素 x 有 $x \preccurlyeq b$, 则称 b 为 B 的最大元 (largest element, greatest element);
2. 对于 B 中每一个元素 x 有 $b \preccurlyeq x$, 则称 b 为 B 的最小元 (least element, smallest element).

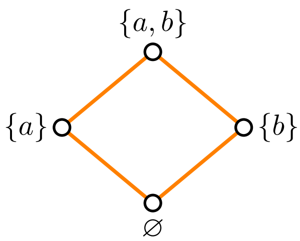
或用符号表达如下:

1. 若 $(\forall x)(x \in B \to x \preccurlyeq b)$ 成立, 则称 b 为 B 的最大元;
2. 若 $(\forall x)(x \in B \to b \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 b 为 B 的最小元;

2.104

极大、极小元; 最大、最小元

Example 77. 考虑偏序集 $\langle \mathscr{P}(\{a, b\}), \subseteq \rangle$, 其哈斯图为:



1. 若 $B = \{\{a\}, \varnothing\}$, 则 $\{a\}$ 是 B 的最大元; $\varnothing$ 是 B 的最小元.
2. 若 $B = \{\{a\}, \{b\}\}$, 则 B 没有最大元和最小元, 因为 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 是不可比较的.

2.105

极大、极小元; 最大、最小元

Theorem 78. *设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集且 $B \subseteq A$, 若 B 有最大 (最小) 元, 则必是惟一的.*

证: 假定 a 和 b 两者都是 B 的最大元素, 则 $a \preccurlyeq b$ 和 $b \preccurlyeq a$, 从 $\preccurlyeq$ 的反对称性, 得到 $a = b$.

B 的最小元情况与此类似. □

一个偏序集的子集, 甚至是全序子集都未必有最小元或最大元.

例如, 在实数集合 $\mathbb{R}$ 中, 以通常的大小关系为序, 则 {所有的整数}, {所有的正有理数}, $(0, 1)$ 等子集都没有最小元.

当然, 最大元的情形类似.

2.106

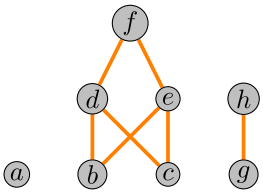
极大、极小元; 最大、最小元

注: 最小元与极小元的不同

- 最小元是 B 中最小的元素, 它与 B 中其它元素都可比; 而极小元不一定与 B 中所有元素都可比, 只要没有比它小的元素, 它就是极小元.
- 对于有穷集 B, 极小元一定存在, 但最小元不一定存在. 最小元如果存在, 一定是惟一的, 但极小元可能有多个.
- 如果 B 中只有一个极小元, 则它一定是 B 的最小元; 如果 B 中有最小元, 则它一定是 B 的惟一的极小元.

类似的, 极大元与最大元也有这种区别和联系. 2.107

Example 79. 考虑如图所示的偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.



解: 由该偏序集的哈斯图可知:

- 极小元: a, b, c, g;
- 极大元: a, f, h;
- 没有最小元与最大元. □

☞ 由这个例子可以知道, 哈斯图中的孤立顶点既是极小元也是极大元. 2.108

偏序集的子集的上界、下界

Definition 80. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $a \in A$:

1. 若 $(\forall x)(x \in B \to x \preccurlyeq a)$ 成立, 则称 a 为 B 的上界 (upper bound);
2. 若 $(\forall x)(x \in B \to a \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 a 为 B 的下界 (lower bound);

☞ 注意这里 $a \in A$. 即 B 的上界、下界不一定是 B 中的元素. 2.109

偏序集的子集的上界、下界

Definition 81. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$,

1. 设 a 是 B 的一个上界, 若对 B 的所有上界 y 均有 $a \preccurlyeq y$, 则称 a 为 B 的最小上界 (least upper bound) 或上确界 (supremum), 记为 $\text{LUB}B$ 或 $\sup B$;
2. 设 b 是 B 的一个下界, 若对 B 的所有下界 z 均有 $z \preccurlyeq b$, 则称 b 为 B 的最大下界 (greatest lower bound) 或下确界 (infimum), 记为 $\text{GLB}B$ 或 $\inf B$.

☞ 或者:

1. 令 $C = \{a \mid a \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的 最小上界;
2. 令 $D = \{b \mid b \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 D 的最大元为 B 的 最大下界. 2.110

偏序集的子集的上界、下界

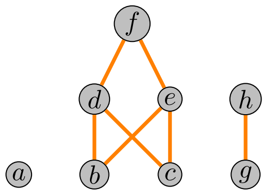
注

- B 的最小元一定是 B 的下界, 同时也是 B 的最大下界. 但反过来不一定正确, B 的下界不一定是 B 的最小元, 因为它可能不是 B 中的元素.
- 同样的, B 的最大元一定是 B 的上界, 同时也是 B 的最小上界. B 的上界也不一定是 B 的最大元.
- B 的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在. 如果存在, 最小上界与最大下界是惟一的.

2.111

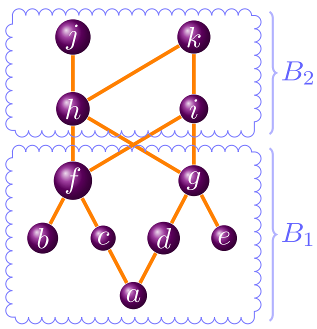
☞ B 的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在? 看一个例子.

Example 82. 考虑如下哈斯图所示的偏序集.



令 $B = \{b, c, d\}$, 则 B 的下界和最大下界都不存在, 上界有 d 和 f, 最小上界为 d. 2.112

Example 83. 给定偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的哈斯图, 求 $B_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B_2 = \{h, i, j, k\}$, $B_3 = \{f, h, j, i, g\}$ 的上界, 下界, 上确界, 下确界.



子集	上界	下界	上确界	下确界
$\{a, b, c, d, e, f, g\}$	h, i, j, k	无	无	无
$\{h, i, j, k\}$	无	a, b, c, d, e, f, g	无	无
$\{f, h, j, i, g\}$	无	a	无	a

2.113

Example 84. 对 $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$ 的子集 $B_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}$; $B_2 = \{x \mid 0 \leqslant x < +\infty\}$.

1. 关于 B_1, 有
   - 0 为 B_1 的最大下界; 1 为 B_1 的最小上界;
   - B_1 有无穷多个上界 $\big((\forall x)(x \geqslant 1 \to x$ 为 B_1 的上界$)\big)$;
   - B_1 有无穷多下界 $\big((\forall x)(x \leqslant 0 \to x$ 为 B_1 的下界$)\big)$;
   - 但 0, 1 不属于 B_1, 故不是 B_1 的最小 (大) 元素.
2. 关于 B_2, 有
   - 0 为 B_2 的最小元素, 故也是最大下界;
   - B_2 有无穷多下界 $\big((\forall x)(x \leqslant 0 \to x$ 为 B_2 的下界$)\big)$;
   - 但 B_2 没有上界, 更没有最小上界.

2.114

良序集合

Definition 85. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集, 如果 A 的每一非空子集总含有最小元, 那么 $\preccurlyeq$ 称为 A 上的良序 (well-ordering), 序偶 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 叫做良序集合.

Example 86. 例如, $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 及 $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 对于 $\leqslant$ 关系来说是良序集合, 即 $\langle I_n, \leqslant \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ 是良序集合.

2.115

良序集合

Theorem 87. *每一良序集合, 一定是全序集合.*

证: 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为良序集合. 则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 已经是偏序集.

要进一步证 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为全序集, 只需要证

$$(\forall a)(\forall b)\big((a, b \in A) \to (a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)\big)$$

成立.

对 $\forall a, b \in A$, 可构成子集 $\{a, b\}$. 由 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为良序集合, 则 $\{a, b\}$ 必存在最小元素: a 或 b.

所以

$$(a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a).$$

□

2.116

良序集合

Theorem 88. *每一有限的全序集合, 一定是良序集合.*

证: 设 $A=\{a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n\}$, 令 $\langle A,\,\preccurlyeq\rangle$ 是全序集.

假设 $\langle A,\,\preccurlyeq\rangle$ 不是良序集, 则必存在非空子集 $B\subseteq A$, 在 B 中不存在最小元.

由于 B 是一个有限集合, 故一定可以找出两个元素 x 与 y 是无关的.

由于 $\langle A,\,\preccurlyeq\rangle$ 是全序集, $x,\,y\in A$, 所以 x 与 y 必有关系, 得出矛盾.

故 $\langle A,\,\preccurlyeq\rangle$ 必是良序集. □

上述结论对于无限的全序集合不一定成立. 例如 $\langle(0,1),\leqslant\rangle$ 是一个全序集合, 但不是良序集合, 因为集合本身就不存在最小元素. 2.117

良序集合

Example 89.

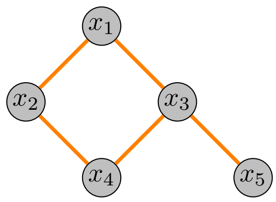
1. 实数集 $\mathbb{R}$ 上的 "$\leqslant$" 关系是全序关系, 因为任何两个数总是可比大小的; 但它不是良序关系, 例如其子集 $A=(0,1]$ 无最小元素;
2. 正整数集合 $\mathbb{N}^{+}$ 上的整除关系一般来说不是全序关系, 如集合 $\{1,2,3\}$ 上的整除关系就不是全序关系, 因为 2 和 3 不可比;
3. 全序集合 $\langle\mathbb{Z},\leqslant\rangle$ 不是良序集合, 因为 $\mathbb{Z}$ 的某些子集 (例如 $\mathbb{Z}$ 本身) 不包含最小元素.

☞ 总的来说, 偏序、全序、良序, 依次加强. 2.118

Example 90. 设集合 $P=\{x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5\}$ 上的偏序关系如图所示.

① 找出 P 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元.

② 找出子集 $\{x_2,\,x_3,\,x_4\}$, $\{x_3,\,x_4,\,x_5\}$, $\{x_1,\,x_2,\,x_3\}$ 的上界, 下界, 上确界, 下确界.



解: ① P 的最大元是 x_1, 无最小元. 极大元是 x_1, 极小元是 x_4, x_5.

② 如下表:

子集	上界	下界	上确界	下确界
$\{x_2,\,x_3,\,x_4\}$	x_1	x_4	x_1	x_4
$\{x_3,\,x_4,\,x_5\}$	x_1,x_3	无	x_3	无
$\{x_1,\,x_2,\,x_3\}$	x_1	x_4	x_1	x_4

2.119