Chapter 5

格

Discrete Mathematics

December 27, 2012

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

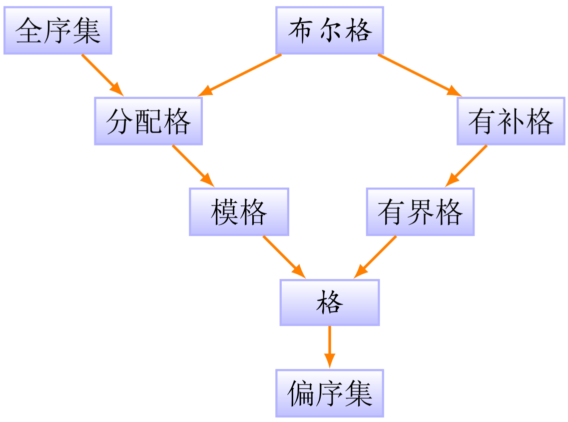
5.1

主要内容

- 格 (Lattice): 一个偏序集, 其任意两个元素都有最小上界和最大下界.
- 特殊的格: 分配格, 有补格.
- 布尔代数: 有补分配格.

5.2

本章概念关系图



5.3

Contents

1 格的定义

本节主要内容:

1. 格的两种定义;
2. 格的基本性质;
3. 格与代数系统间的关系. 5.5

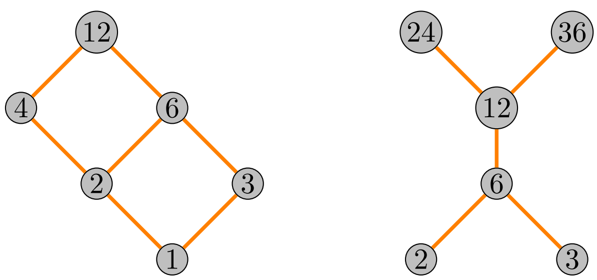
回顾:

Definition 1 (偏序)**.** 如果集合 A 上的关系 $\preccurlyeq$ 具有

1. 自反性,
2. 反对称性,
3. 传递性.

则称关系 $\preccurlyeq$ 为 A 上偏序关系. $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 称为偏序集. 5.6

Example 2. 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Y = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$. 集合 X 和 Y 关于整除关系 " | " 构成两个偏序集: $\langle X, |\rangle$, $\langle Y, |\rangle$. 它们的哈斯图如下:



(a) $\langle X, |\rangle$ (b) $\langle Y, |\rangle$

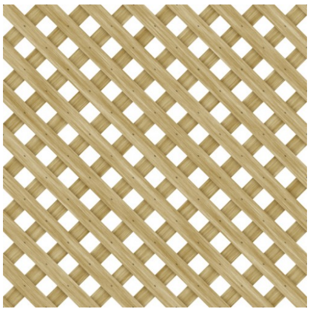
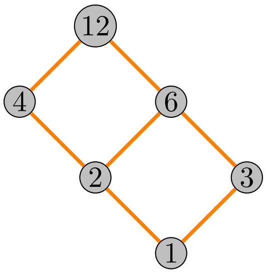
虽然都是偏序集, 但是它们有一个重要的差别:

- $\langle X, |\rangle$ 中 "每两个元素构成的集合" 都有最大下界和最小上界.
- $\langle Y, |\rangle$ 无此特点. 5.7

格的定义

Definition 3 (格)**.** 如果偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中任意两个元素都有最小上界和最大下界, 则称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格 (lattice).

lattice: 木格, 窗格. a 和 b 的最小上界: $\mathrm{lub}\{a, b\}$. (least upper bound)
a 和 b 的最大下界: $\mathrm{glb}\{a, b\}$. (greatest lower bound) 5.8

格的典型例子

Example 4. 偏序集 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是格:

任意 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}(S)$, 它们的最大下界为 $S_1 \cap S_2$; 最小上界为 $S_1 \cup S_2$.

☞ 这是格的一个典型例子. 关于格的很多性质, 都可以借助这个例子理解.

Example 5. 偏序集 $\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$ 是格:

$\mathbb{Z}^+$ 中任意两个元素的最小公倍数、最大公约数就是这两个元素的最小上界和最大下界. 5.9

格的等价定义

为什么格的定义中是要求 “两个元素”? 事实上, 多个元素也可以. 因为, “任意两个元素有上下确界” 当且仅当 “任意有限个元素有上下确界”. 从而, 格有如下的等价定义.

Definition 6. 偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 当且仅当 A 中任意非空有限子集 S 有最小上界、最大下界.

其中要求子集元素个数 “有限” 是重要的, 不能是 “任意的非空子集”. 比如 $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ 是一个格, 但不是任意的非空子集都有最小上界、最大下界 —— $\mathbb{N}$ 就是它自己的一个子集, 它没有最小上界. 5.10

Definition 7. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 在 A 上定义两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \vee b \triangleq \mathrm{lub}\{a, b\}, \tag{1}$$

$$a \wedge b \triangleq \mathrm{glb}\{a, b\}. \tag{2}$$

则二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算; 称 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 所诱导的代数系统.

Example 8. 在格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 诱导的代数系统中, 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 就是普通的并、交运算: 任意 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}(S)$, 有

$$S_1 \vee S_2 = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \wedge S_2 = S_1 \cap S_2.$$

Example 9. 在格 $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$ 或 $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ 诱导的代数系统中, 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 就是普通的取大、取小运算. 比如, 任意的 $a, b \in \mathbb{N}$, 有

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

Example 10. 对于格 $\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$ 来说, 其诱导的代数系统 $\langle \mathbb{Z}^+, \vee, \wedge \rangle$ 中的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别为: 对任意的 $a, b \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$a \vee b = \mathrm{LCM}(a, b), \qquad \text{(least common mutiple, 最小公倍数)}$$
$$a \wedge b = \mathrm{GCD}(a, b). \qquad \text{(greatest common divisor, 最大公约数)}$$

这个定义表明, 从格出发, 可以构造一个代数系统. 这也说明了格这类特殊偏序集的重要性. 5.11

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq \rangle$ 也是偏序集.
- $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 与 $\langle A, \succcurlyeq \rangle$ 的哈斯图是互为颠倒的.
- 称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, $\langle A, \succcurlyeq \rangle$ 为彼此对偶的偏序集.
- 如果其中一个是格, 则另一个也是格.
- 由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统的并 (交) 运算, 正好是由格 $\langle A, \succcurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统的交 (并) 运算.

Theorem 11 (对偶原理)**.** *设 P 是对任意格都为真的命题, 将 P 中的 $\preccurlyeq, \vee, \wedge$ 分别换成 $\succcurlyeq, \wedge, \vee$ 得命题 Q, 则 Q 对任意格也是真的命题. (Q 称为 P 的对偶命题.)*

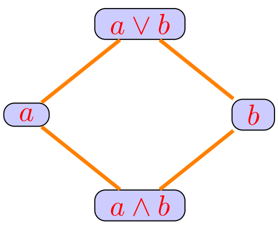
5.12

格的基本性质

Theorem 12. *设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 对任意 $a, b \in A$, 有*

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b,$$
$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b.$$

分析 由 $\vee$, $\wedge$ 的定义即得上述结论. 如图:



证 因为 $a \vee b$ 是 a 和 b 的 (最小) 上界, 所以

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b.$$

由对偶原理, 即得

$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b. \qquad \square$$

5.13

Theorem 13. 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $a, b, c, d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证　已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

由传递性可得

$$a \preccurlyeq b \vee d, \quad c \preccurlyeq b \vee d.$$

这说明 $b \vee d$ 是 a 和 c 的一个上界, 但 $a \vee c$ 是 a 和 c 的最小上界, 所以

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d.$$

类似地可以证明

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \qquad \square$$

5.14

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $a, b, c \in A$, 若 $b \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c, \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c.$$

这个性质称为格的保序性.

证　已知 $b \preccurlyeq c$, 又 $a \preccurlyeq a$, 所以

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c.$$

同理有

$$a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c. \qquad \square$$

5.15

Theorem 14. 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \wedge b = a. \qquad \text{(反对称性)}$$

反之, 假定 $a \wedge b = a$, 又 $a \wedge b \preccurlyeq b$, 所以

$$a \preccurlyeq b.$$

因此, $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b$. 其他的证明类似. □ 5.16

Theorem 15. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

此时的哈斯图为:

$$\boxed{\text{“小} \wedge \text{大} = \text{小”}, \text{“小} \vee \text{大} = \text{大”}}$$

5.17

格的基本性质

Theorem 16. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 所诱导的代数系统为 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$, 则对任意的 $a, b, c, d \in A$, 有 *[1ex]*

① $\left.\begin{array}{l} a \vee b = b \vee a, \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{array}\right\}$ *(交换律)*

② $\left.\begin{array}{l} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \end{array}\right\}$ *(结合律)*

③ $\left.\begin{array}{l} a \vee a = a, \\ a \wedge a = a. \end{array}\right\}$ *(幂等律)*

④ $\left.\begin{array}{l} a \vee (a \wedge b) = a, \\ a \wedge (a \vee b) = a. \end{array}\right\}$ *(吸收律)*

5.18

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

分析 由偏序的反对称性, 可证下列两式同时成立:

$$(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c), \tag{5}$$

$$a \vee (b \vee c) \preccurlyeq (a \vee b) \vee c. \tag{6}$$

证 因为 $b \preccurlyeq b \vee c$, 由保序性得

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

反复使用结论 “$x \preccurlyeq x \vee y$, $y \preccurlyeq x \vee y$”, 有

$$c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

这说明 $a \vee (b \vee c)$ 是 $a \vee b$ 和 c 的一个上界. 但 $(a \vee b) \vee c$ 是 $a \vee b$ 和 c 的最小上界, 所以

$$(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

类似可证

$$a \vee (b \vee c) \preccurlyeq (a \vee b) \vee c.$$

因而 $$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$$ □ 5.19

证明吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$.

证 因为

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \vee (a \wedge b) = a. \tag{7}$$

这里 (7) 式成立的理由是 “大 $\vee$ 小 $=$ 大”. □ 5.20

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee$, $\wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee$, $\wedge$ 必满足幂等律.

证 对任意 $a, b \in A$, 因 $\vee$, $\wedge$ 满足吸收律, 所以

$$a \vee (a \wedge b) = a, \tag{8}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{9}$$

由 b 的任意性, 在 (8) 式中用 $a \vee b$ 取代 b 仍然成立, 可得

$$a \vee (a \wedge b) = a.$$

$$a \vee \big(a \wedge (a \vee b)\big) = a.$$

$$a \vee \big(\underbrace{a \wedge (a \vee b)}_{a}\big) = a.$$

再由 (9) 式得:

$$a \vee a = a.$$

同理可证 $$a \wedge a = a.$$ □ 5.21

格与代数系统之间的关系

Theorem 17. 设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 则 A 上存在偏序关系 $\preccurlyeq$, 使 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格.

分析 证明思路:

1. 在 A 上构造偏序关系 $\preccurlyeq$;
2. 证明 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中任意两个元素有最小上界和最大下界.

证 在 A 上定义二元关系 $\preccurlyeq$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a.$$

先证 $\preccurlyeq$ 是偏序. 5.22

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以

  $$a \preccurlyeq a.$$

  从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$. 而运算 $\wedge$ 满足交换律, 所以

  $$a \wedge b = b \wedge a.$$

  故 $a = b$. 从而 $\preccurlyeq$ 是反对称的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq c$, 则 $a \wedge b = a$, $b \wedge c = b$. 那么

  $$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c && (a \wedge b = a) \\ &= a \wedge (b \wedge c) && (\text{结合律}) \\ &= a \wedge b && (b \wedge c = b) \\ &= a. && (a \wedge b = a) \end{aligned}$$

  所以 $a \preccurlyeq c$, 说明 $\preccurlyeq$ 是传递的. 5.23

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)}\\ &= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)}\\ &= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)}\\ &= a \wedge b. && \text{(幂等律)}\end{aligned}$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$. 说明 $a \wedge b$ 是 a, b 的下界.

设 c 是 a, b 的任一下界, 则 $c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$. 按 $\preccurlyeq$ 的定义有

$$c \wedge a = c, \qquad c \wedge b = c.$$

进而有

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c.$$

按 $\preccurlyeq$ 的定义有 $c \preccurlyeq a \wedge b$. 故 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 5.24

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

先证 $a \wedge b = a$ 与 $a \vee b = b$ 等价.

若 $a \wedge b = a$, 则

$$\begin{aligned}a \vee b &= (a \wedge b) \vee b && (a \wedge b = a)\\ &= b \vee (a \wedge b) && \text{(交换律)}\\ &= b \vee (b \wedge a) && \text{(交换律)}\\ &= b. && \text{(吸收律)}\end{aligned}$$

于是 $a \vee b = b$.

反之, 若 $a \vee b = b$, 则

$$\begin{aligned}a \wedge b &= a \wedge (a \vee b) && (a \vee b = b)\\ &= a. && \text{(吸收律)}\end{aligned}$$

亦即 $a \wedge b = a$.

由此可见, 偏序关系 $\preccurlyeq$ 的等价定义为: “$a \preccurlyeq b \iff a \vee b = b$. ” 5.25

可以用证明 “ $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界” 类似的方法证明 “ $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界”.

综上所述, $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格. □

☞ 事实上, 这个定理给出的是格的另一个定义方式.

Definition 18. 设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 定义 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a. \quad (\text{或 } a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \vee b = b.)$$

则 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格.

由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 可以构造代数系统 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$, 反过来, 由代数系统 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 出发也可以返回到格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$. 5.26

Theorem 19 (弱分配律)**.** *在一个格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中, 对任意的 $a, b, c \in A$, 都有*

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{10}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c). \tag{11}$$

分析

- 比较: 集合的并、交运算的分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{12}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C). \tag{13}$$

- 谓之 "分配不等式", 或弱分配律, 次分配律;
- 这里, (10) 式与 (11) 式是互为对偶的.

下证 (10) 式成立, (11) 式由对偶原理可得. 5.27

证　要证 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 可以先分别证明

$$a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{14}$$

$$b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{15}$$

- (14) 式成立, 因为

$$\begin{aligned} a &= a \wedge a && (\text{幂等性}) \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). && \big(a \preccurlyeq (a \vee b),\, a \preccurlyeq (a \vee c)\big) \end{aligned}$$

- (15) 式成立, 因为

$$b \wedge c \preccurlyeq b \preccurlyeq a \vee b,$$

$$b \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq a \vee c,$$

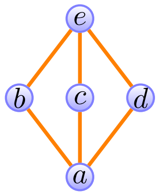
所以

$$\begin{aligned} b \wedge c &= (b \wedge c) \wedge (b \wedge c) \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

□

5.28

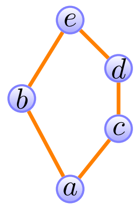
Example 20. 分配不等式实例:



$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b, \quad (b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a.$$

☞ 称为钻石格 (diamond lattice). 5.29

Example 21. 分配不等式实例:



$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d, \quad (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = a \vee c = c.$$

☞ 称为五角格 (pentagon lattice). 5.30

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 对于任意的 $a, b, c \in A$, 必有

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big), \tag{16}$$

$$a \vee \big(b \wedge (a \vee c)\big) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{17}$$

证 注意到前述定理的结论:

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c, \tag{18}$$

而 $a \preccurlyeq a \vee c$ 恒成立, 将 (18) 式中的 c 换成 $a \vee c$, 即得

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee \big(b \wedge c\big) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

$$a \preccurlyeq a \vee c \iff a \vee \big(b \wedge (a \vee c)\big) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

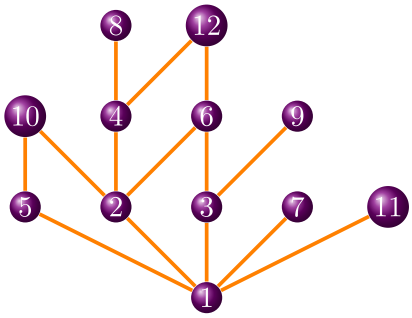
而上式左边恒成立, 则右边也恒成立. 即证 (17) 成立.

又 (16) 式与 (17) 式是互为对偶的, 所以 (16) 式成立. □ 5.31

练习

设 $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, $\preccurlyeq$ 定义为: 对于 $n_1, n_2 \in L$, $n_1 \preccurlyeq n_2$ 当且仅当 n_1 是 n_2 的因子. 问 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是否为格?

解 不是格. 哈斯图为:



例如, “9 和 10” 没有最小上界. □ 5.32

2 子格与格同态

Definition 22 (子格)**.** 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 设 B 是 A 的非空子集. 如果运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 在 B 中封闭, 则称 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格.

可以证明, 子格也是格.

Example 23. 设 E^+ 是正偶数的全体, 易知 $\langle E^+, |\rangle$ 是 $\langle \mathbb{Z}^+, |\rangle$ 的子格:

任何两个偶数的最大公约数和最小公倍数都是偶数, 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 关于 E^+ 是封闭的. 5.33

Example 24. 设 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 $a \in S$, 构造 S 的子集为:

$$T = \left\{ x \,\middle|\, x \in S \text{ 且 } x \preccurlyeq a \right\},$$

则 $\langle T, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 的一个子格.

证 对任意的 $x, y \in T$, 必有 $x \preccurlyeq a$ 和 $y \preccurlyeq a$, 所以

$$x \vee y \preccurlyeq a, \qquad (a \text{ 是 } x, y \text{ 的上界})$$
$$x \wedge y \preccurlyeq a, \qquad (x \wedge y \preccurlyeq x \vee y)$$

故

$$x \vee y \in T, \qquad x \wedge y \in T.$$

运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 关于 T 是封闭的, 因此, $\langle T, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 的一个子格. □ 5.34

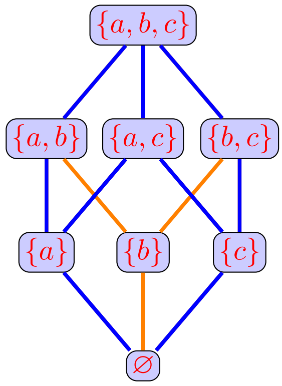
注意

若 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $B \subseteq A$ 且 $B \neq \varnothing$, 则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 仍然是偏序集,

- 但 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 不一定是格.
- 即使是格, 也不一定是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格.

5.35

Example 25. 设 $S = \{a, b, c\}$, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq\rangle$ 是格, 其哈斯图如下.[1em]



取
$A = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$,
$B = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
则

- $\langle A, \subseteq\rangle$ 是 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq\rangle$ 的子格;
- $\langle B, \subseteq\rangle$ 是格, 但不是 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq\rangle$ 的子格. 这是因为

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin B.$$

5.36

格同态

格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 可视为具有两个二元运算的代数系统 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$, 其中运算满足交换律、结合律、吸收律和幂等律.

因此, 对格可引入代数系统中同态的概念. 5.37

格同态

Definition 26. 设 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$, $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 是格, 它们所诱导的代数系统分别是 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$, $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$. 如果存在映射 $f : A_1 \to A_2$, 使对任意 $a, b \in A_1$, 有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b), \qquad f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b).$$

- 则称 f 是从 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$ 的格同态.
- 称 $\langle f(A_1), \preccurlyeq_2\rangle$ 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 的格同态象.
- 如果 f 是双射, 则称 f 是从 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$ 的格同构. 也称格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$, $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 同构.

5.38

Theorem 27. 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

证 已知 $x \preccurlyeq_1 y$, 因 $x \preccurlyeq_1 y \iff x \wedge_1 y = x$, 则

$$x \wedge_1 y = x.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \wedge_1 y) && (x \wedge_1 y = x) \\ &= f(x) \wedge_2 f(y). && (f\ 是格同态) \end{aligned}$$

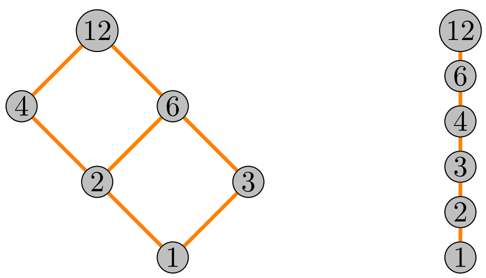
而 $f(x) \wedge_2 f(y) = f(x) \iff f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$, 所以

$$f(x) \preccurlyeq_2 f(y). \qquad \square$$

注:
此定理说明, 格同态是保序的. 但, 其逆不真.

5.39

Example 28. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle A, |\rangle$ 和 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 都是格, 其中 “ | ” 表示整除关系, “$\preccurlyeq$” 表示数的 “小于等于” 关系.



作映射 $f : A \to A$, $f(x) = x$. 显然, 若 $x|y$, 则 $f(x) \preccurlyeq f(y)$, 因而 f 是保序的.

但 f 不是格同态. 例如:

$$\underbrace{f(4 \wedge_1 6)}_{=2} \neq \underbrace{f(4) \wedge_2 f(6)}_{=4}.$$

5.40

Theorem 29. *设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 当且仅当*

$$\forall\ a, b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{19}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构. 下证 (19) 式成立.

i) 对任意 $a, b \in A_1$, 如果 $a \preccurlyeq_1 b$, 由保序性, 则 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$.

ii) 若 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$, 则

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \wedge_2 f(b) \\ &= f(a \wedge_1 b). && (f\ 是同构) \end{aligned}$$

而 f 是双射, 则

$$\begin{aligned} f(a \wedge_1 b) = f(a) &\iff a \wedge_1 b = a \\ &\iff a \preccurlyeq_1 b. \end{aligned}$$

5.41

续证: (2) 假设对任意 $a, b \in A_1$, $a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$. 即映射 f 是保序的.

要证 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b), \tag{20}$$

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b). \tag{21}$$

要证 (20) 式成立, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b), \qquad f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$$

同时成立.

因为 $a \wedge_1 b \preccurlyeq_1 a$, $a \wedge_1 b \preccurlyeq_1 b$, 由 f 的保序性, 得

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a), \qquad f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(b).$$

所以

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b).$$

5.42

续证: 记 $f(a) \wedge_2 f(b) \triangleq f(d)$, 则 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a)$, $f(d) \preccurlyeq_2 f(b)$. 由 f 的保序性, 得

$$d \preccurlyeq_1 a, \qquad d \preccurlyeq_1 b.$$

所以, $d \preccurlyeq_1 a \wedge_1 b$. 再由保序性, 得 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$, 即

$$f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b).$$

类似可证 $f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$ 成立.

故 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构. □ 5.43

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \{\, x \mid x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \,\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

证　可证 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格. 下证 “集合 B 关于运算是封闭的” 即可.

任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$, 可得

$$a \preccurlyeq x \vee y.$$

由 $x \preccurlyeq b$, 和 $y \preccurlyeq b$, 可得

$$x \vee y \preccurlyeq b.$$

所以 $a \preccurlyeq x \vee y \preccurlyeq b$, 即 $x \vee y \in B$. 同理可证 $x \wedge y \in B$. □ 5.44

3 几种特殊的格

本节介绍几种特殊的格：

- 分配格；
- 有补格；
- 模格. 5.45

分配格

格中任意三个元素 a, b, c 满足分配不等式:

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{22}$$

$$a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{23}$$

是否存在格使上述两式等号成立呢?

回答是肯定的. 比如格的典型例子 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$, 其分配律是成立的. 5.46

分配格

Definition 30. 设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 满足

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad \text{(并对交可分配)}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \quad \text{(交对并可分配)}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格.

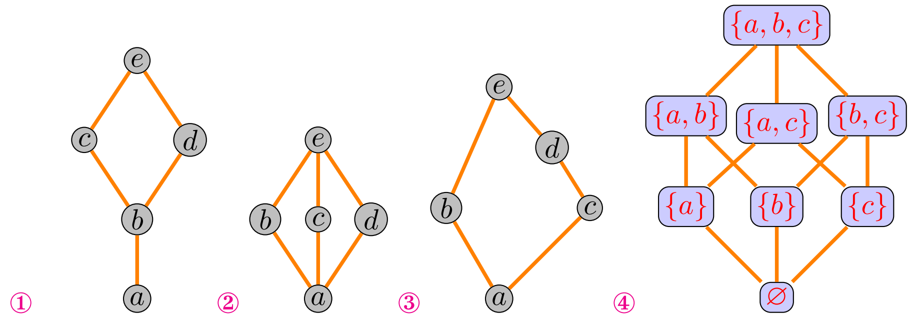
☞ 这和我们熟知的集合运算的分配律, 有完全相同的形式:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

可见 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 也是分配格的典型例子. 5.47

Example 31. 判断下列各图是否为分配格?



解　(1), (4) 是分配格. (2), (3) 不是分配格. 在 (2) 中,

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b, \quad (b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a,$$

在 (3) 中,

$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d, \quad (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = a \vee c = c. \qquad \square$$

(2), (3) 这两个具有五个元素的格是很重要的, 分别称为钻石格 (diamond lattice) 和五角格 (pentagon lattice), 分别记为 M_3 和 N_5. 5.48

有一个如下的重要结论 (证明略去).

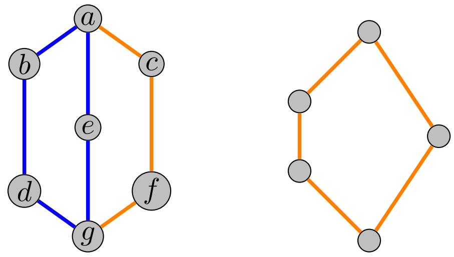
Theorem 32. 一个格是分配格的充要条件是, 在该格中没有任何子格与 M_3 和 N_5 中的任一个同构.

(a) 钻石格 M_3　　(b) 五角格 N_5

5.49

Example 33. 如图 (a) 所示的格中, $\langle \{a, b, d, g, e\}, \preccurlyeq \rangle$ 是格 $\langle \{a, b, c, d, e, f, g\}, \preccurlyeq \rangle$ 的子格,

而这个子格与图 (b) 是同构的, 所以, 图 (a) 所示的格不是分配格. 5.50



(a) (b)

Theorem 34. 如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证　设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{24}$$

则

$$\begin{aligned}
& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
=\ & \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
=\ & a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && \big((a \vee b) \wedge a = a\big) \\
=\ & a \vee \big((a \wedge c) \vee (b \wedge c)\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
=\ & \big(a \vee (a \wedge c)\big) \vee (b \wedge c) && (\text{结合律}) \\
=\ & a \vee (b \wedge c).
\end{aligned}$$

类似可证 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. □ 5.51

Theorem 35. 链是分配格.

证　设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. (链中的任意两个元都是可比的. 比如 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$. 任意两个元素都有最小上界和最大下界, 所以是格.)

对任意 a, b, $c \in A$, 可分两种情况讨论:

1. $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.
2. $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

① $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.

$$a \wedge (b \vee c) = \begin{cases} a \wedge c = a, & b \preccurlyeq c, \\ a \wedge b = a, & c \preccurlyeq b. \end{cases}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \begin{cases} a \vee (a \wedge c) = a, & a \preccurlyeq b, \\ (a \wedge b) \vee a = a, & a \preccurlyeq c. \end{cases}$$

所以, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. 5.52

续证: ② $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

这时必有 $b \vee c \preccurlyeq a$ (上界). 进而有

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$$

另一方面, 由 $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$ 可得:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$$

所以,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

得证: 链是分配格. □ 5.53

Theorem 36. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格, 则对任意 $a, b, c \in A$, 如果

$$a \wedge b = a \wedge c \quad 且 \quad a \vee b = a \vee c$$

则必有

$$b = c.$$

证

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee c &= (a \wedge c) \vee c && (a \wedge b = a \wedge c) \\
&= c && (\text{吸收律}) \\
(a \wedge b) \vee c &= (a \vee c) \wedge (b \vee c) && (\text{分配律}) \\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) && (a \vee b = a \vee c) \\
&= (b \vee a) \wedge (b \vee c) && (\text{交换律}) \\
&= b \vee (a \wedge c) && (\text{分配律}) \\
&= b \vee (a \wedge b) && (a \wedge b = a \wedge c) \\
&= b. && (\text{吸收律})
\end{aligned}$$

所以 $b = c$. □ 5.54

模格

Theorem 37. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 则对于任意的 $a, b, c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$, 得

$$\begin{aligned}
a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && (\text{分配不等式}) \\
&= (a \vee b) \wedge c. && \big((a \vee c) = c\big)
\end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$, 则由

$$\begin{aligned} a &\preccurlyeq a \vee (b \wedge c) \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c. \end{aligned}$$

所以, $a \preccurlyeq c$. □ 5.55

Definition 38. 设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 只要 $a \preccurlyeq c$, 就有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c, \tag{25}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是模格 (modular lattice).

☞ 对照前述结论:

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 则对于任意的 a, b, $c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c. \tag{26}$$

☞ 把 (25) 式与 "分配等式" 相比较:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{27}$$

知分配格必定是模格. 5.56

Theorem 39. 分配格必定是模格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格, 任意的 a, b, $c \in A$, 若 $a \preccurlyeq c$, 则

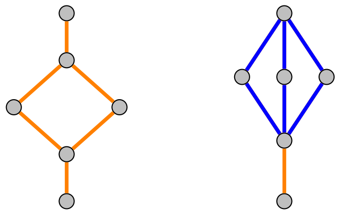
$$a \vee c = c.$$

故

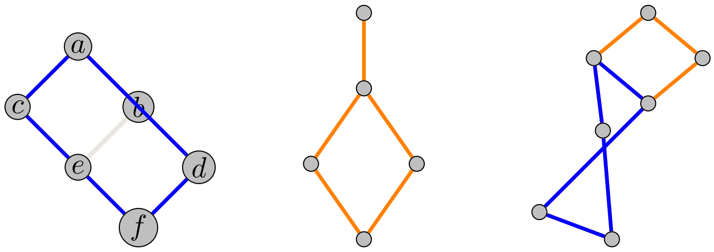
$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配律)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. \end{aligned}$$

即证 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是模格. □ 5.57

模格不一定是分配格



(a) (b)



(a) (b) (c)

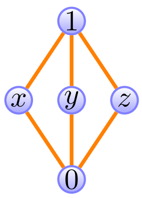
钻石格 M_3 不是分配格, 但它是模格.

对于任意的 $a, b, c \in \{0, 1, x, y, z\}$, 若有 $a \preccurlyeq c$, 则必有 $a = 0$ 或者 $c = 1$.

若 $a = 0$, 则

$$a \vee (b \wedge c) = b \wedge c,$$
$$(a \vee b) \wedge c = b \wedge c.$$

Example 40.



若 $c = 1$, 则

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee b,$$
$$(a \vee b) \wedge c = a \vee b.$$

所以它是模格. □ 5.58

练习

试举两个含有 6 个元素的格, 一个是分配格, 另一个不是分配格.

解 分配格如图 (a) 所示, 不是分配格如图 (b) 所示.

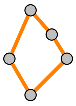
图 (b) 中有子格与钻石格同构, 所以图 (b) 不是分配格. □

当然, 分配格的最直接例子是链. 非分配格还有很多, 比如六个元素组成的一个环形结构, 此时在其中任取 5 点都是和五角格 N_5 同构的. 5.59

练习

在下图中给出的几个格, 哪个是分配格?

解 图 (b) 是分配格.

图 (a), (c) 中都有子格与  同构, 所以图 (a), (c) 不是分配格. □ 5.60

格的全下界、全上界

Definition 41. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 如果存在元素 $a \in A$, 对任意 $x \in A$, 都有

$$a \preccurlyeq x,$$

则称 a 为格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的全下界. 格的全下界记为 0.

Definition 42. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 如果存在元素 $a \in A$, 对任意 $x \in A$, 都有

$$x \preccurlyeq a,$$

则称 a 为格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的全上界. 格的全上界记为 1.

5.61

格的全下界、全上界

Theorem 43. *格的全下界 (全上界) 如果存在, 则必惟一.*

证　假设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 有两个全下界 a 和 b. 那么按全下界的定义, 应有

$$a \preccurlyeq b \quad 和 \quad b \preccurlyeq a$$

同时成立, 从而

$$a = b.$$

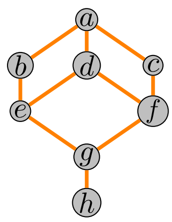
□ 5.62

有界格

Definition 44. 具有全下界和全上界的格称为有界格.

Example 45. 设 S 是有限集合, 那么格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是有界格, 其全下界是 $\varnothing$, 全上界是 S.

Example 46. 如图所示的格中, h 是全下界, a 是全上界. 该格是有界格.



5.63

Theorem 47. *设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有*

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{28}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{29}$$

证 因 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 对任意 $a \in A$, 应有 $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq 1$. 再由格的性质, 即可得:

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a;$$
$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \qquad \square$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.
  - $a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \;\Rightarrow\; 1$ 是 $\vee$ 的零元;
  - $a \vee 0 = 0 \vee a = a \;\Rightarrow\; 0$ 是 $\vee$ 的幺元.
- 运算 $\wedge$ 的零元和幺元分别为 0 和 1.
  - $a \wedge 0 = 0 \wedge a = 0 \;\Rightarrow\; 0$ 是 $\wedge$ 的零元;
  - $a \wedge 1 = 1 \wedge a = a \;\Rightarrow\; 1$ 是 $\wedge$ 的幺元.

5.64

补元

Definition 48. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 对 $a \in A$, 若存在 $b \in A$, 使

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0,$$

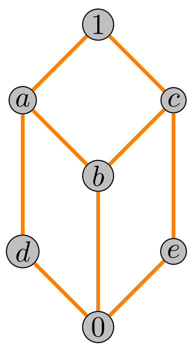
则称 b 是 a 的补元.

Example 49. 设 S 是有限集合, 对有界格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$, 其全下界是 $\varnothing$, 全上界是 S. 任意 $A \in \mathscr{P}(S)$, A 的补元是 $S - A$.

5.65

补元

Example 50.



如图所示有界格中,

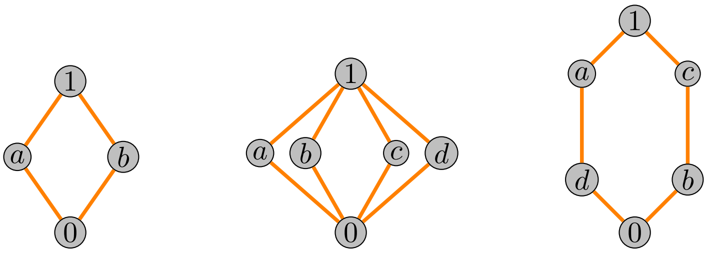
- d 和 c, d 和 e, a 和 e, 0 和 1 互为补元, 即 $a, c, d, e, 0, 1$ 都有补元.
- 但 b 没有补元.
- 一个元的补元可以有多个: 例如, d, e 有两个补元;
- 0 是 1 惟一的补元; 1 是 0 惟一的补元.

对于元素 $a \in A$, 可以存在多个补元, 也可以不存在补元. 5.66

有补格

Definition 51. 在一个有界格中, 如果每个元素至少有一个补元, 则称此格为有补格.

Example 52. 如下是一些有补格的例子. 5.67



(a) (b) (c)

Theorem 53. 在有界分配格中，若某元素有补元，则必惟一.

证 设 a 有补元 b, c, 则有

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0; \tag{30}$$

$$a \vee c = 1, \qquad a \wedge c = 0. \tag{31}$$

那么,

$$a \vee b = a \vee c, \qquad a \wedge b = a \wedge c,$$

由分配格的性质得

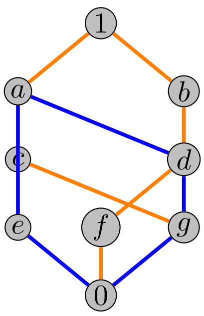
$$b = c. \qquad \square$$

注

- 当补元惟一时, 我们通常用 x', $\overline{x}$ 或 $\neg x$ 表示 x 的补元.
- 注意到有补格是有界格, 故有补分配格中, 每个元素必有惟一的补元.

5.68

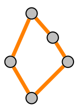
练习



试根据如图所示有界格, 回答以下问题.

- a 和 f 的补元素分别是哪些元素?
- 该有界格是分配格吗?
- 该有界格是有补格吗?

解

- a 和 f 都没有补元;
- 该有界格不是是分配格: 有子格与  同构;
- 该有界格不是有补格. $\square$

5.69

4 布尔代数

主要内容

布尔代数 (或布尔格) 是抽象了集合运算和逻辑运算二者的根本性质的一个代数结构.

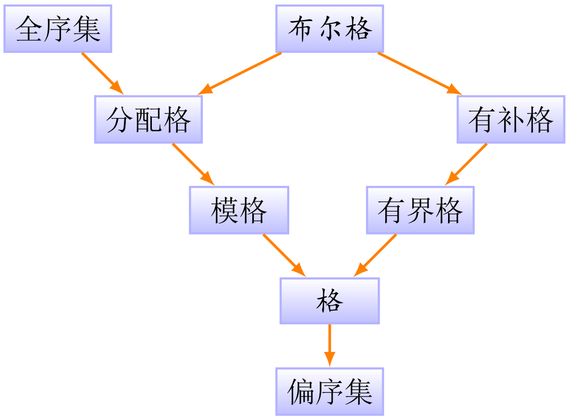
在这一节中将证明:

任何一个有限布尔代数必定与格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 所诱导的代数系统同构.

Definition 54. 一个有补分配格称为布尔格 (**Boolean lattice**).

5.70

概念之间的关系



5.71

布尔代数

注意到有补分配格 (布尔格) 的每个元素有补元, 且惟一.

在布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上可以确定一个一元运算, 记为 "$^-$", 使得 $\bar{a}$ 为 a 的补元. 这个一元运算称为补运算.

Definition 55. 由布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, 可以诱导一个代数系统 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$, 这个代数系统称为布尔代数 (**Boolean lattice**).

☞ 为了强调布尔代数中的最小元 0 和最大元 1, 也记布尔代数为 $\langle A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1 \rangle$.

Example 56. 设 S 是非空有限集合, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是一个布尔格. 而由这个布尔格所诱导的代数系统 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle$ 是一个布尔代数.

5.72

布尔代数的等价定义

Definition 57. 布尔代数是一个集合 A, 提供了两个二元运算 $\wedge$, $\vee$, 一个一元运算 $\neg$ 和两个元素 0 和 1, 对于集合 A 的任意元素 a, b 和 c, 满足

1. 结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;
2. 交换律: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;
3. 吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$;
4. 分配律: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

5. 互补律: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$.

☞ 前三条就是格的定义; 加上后面两条, 说明布尔代数是有补分配格. 5.73

Example 58. 最简单的布尔代数只有两个元素 0 和 1, 其运算表为:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

☞ 应用于逻辑和电路设计. 5.74

Theorem 59. 设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{32}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{33}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{34}$$

证 ① 按定义, a 与 $\overline{a}$ 互补, 所以 $\overline{a}$ 的补元是 a, 即

$$\overline{(\overline{a})} = a. \tag{35}$$

② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) && \text{(分配律)} \\
&= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 = 1, \\
(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \\
&= (0 \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 = 0.
\end{aligned}$$

所以 $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$. 同理可证 (34) 式. □ 5.75

布尔代数的同构

Definition 60. 设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 和 $\langle B, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是两个布尔代数, 如果存在双射 $f : A \to B$, 对任意 a, $b \in A$, 有

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \tag{36}$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \tag{37}$$

$$f(\overline{a}) = \overline{f(a)} \tag{38}$$

则称 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 和 $\langle B, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 同构. 5.76

5 有限布尔代数的表示定理

有限布尔代数

Definition 61. 具有有限个元素的布尔代数叫有限布尔代数.

注

关于有限布尔代数有如下重要结论:

- 对任一正整数 n, 必存在含有 2^n 个元素的布尔代数.
- 任一有限布尔代数的元素的个数必为 2^n, n 为正整数.
- 元素个数相同的布尔代数, 都是同构的.

为了证明上述关于有限布尔代数的结论, 先引入原子的概念. 5.77

原子

Definition 62. 设格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 具有全下界 0, 如果有元素 a 盖住[1] 0, 则称元素 a 为原子.

注

如果 a, b 皆为原子, $a \neq b$, 则 $a \wedge b = 0$.

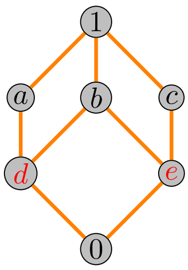
因为, 若 $a \wedge b \neq 0$, 则

$$0 \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq a \text{ (或 } b),$$

则 a 和 b 没有盖住 0, 导致 " a 和 b 不是原子" 的矛盾. 5.78

原子

Example 63. 例如, 如图所示格中, 元素 d, e 是原子.



☞ 可见

- 原子不是惟一的.
- 一个元素可以盖住多个元素. 例如, 1 盖住 a, b, c; b 盖住 d, e. 5.79

[1] 在偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中, $\forall x, y \in A$, 如果 $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 盖住 x. (见第二章)

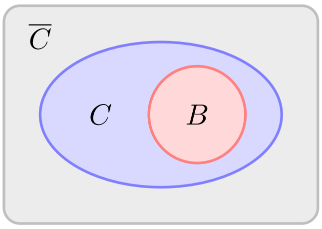


Figure 1: $B \cap \overline{C} = \varnothing$ 当且仅当 $B \subseteq C$.

Theorem 64. *设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.*

证　如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

如果 b 不是原子, 按盖住的定义, 必存在 $b_1 \in A$, 使得

$$0 \prec b_1 \prec b.$$

若 b_1 为原子, 命题得证. 否则, 必存在 $b_2 \in A$, 使

$$0 \prec b_2 \prec b_1 \prec b.$$

因为 A 是有限集合, 经过上述有限的步骤之后, 必可找到一个原子 b_i, 使

$$0 \prec b_i \prec \cdots \prec b_2 \prec b_1 \prec b,$$

它是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中的一条链, 其中 b_i 是原子, 且 $b_i \preccurlyeq b$. □ 5.80

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

用集合的情形, 很容易理解这个结论:

证　如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又}\quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

$$= (b \vee c) \wedge 1$$

$$= b \vee c.$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \preccurlyeq c.$$

反之, 如果 $b \preccurlyeq c$, 则

$$b \wedge \overline{c} \preccurlyeq c \wedge \overline{c} \qquad \text{(格的保序性)}$$

$$\Rightarrow \quad b \wedge \overline{c} \preccurlyeq 0$$

$$\Rightarrow \quad b \wedge \overline{c} = 0. \qquad \square$$

5.81

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.
根据引理 1, 只须证 $b \wedge \bar{c} = 0$. 用反证法.
假设 $b \wedge \bar{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \bar{c}.$$

又 $b \wedge \bar{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \bar{c} \preccurlyeq \bar{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \bar{c}.$$

因 a 是原子, 且 $a \preccurlyeq b$, 所以

$$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\},$$

故 $a \preccurlyeq c$.
由 $a \preccurlyeq \bar{c}$ 和 $a \preccurlyeq c$ 可得 $a \preccurlyeq \bar{c} \wedge c$, 从而 $a \preccurlyeq 0$, 与 a 是原子矛盾.
假设不成立. 得证 $b \preccurlyeq c$. □ 5.82

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

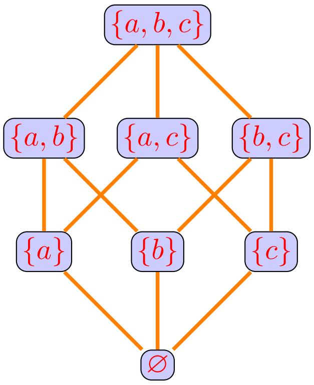
因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\, a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$. 因

$$\begin{aligned}
& a_{j_0} \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}) = a_{j_0} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee \cdots \vee a_k) \\
\Longleftrightarrow\ & (a_{j_0} \wedge a_{j_1}) \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_2}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_t}) \\
& \qquad = (a_{j_0} \wedge a_1) \vee (a_{j_0} \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_0}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_k) \\
\Longleftrightarrow\ & 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee 0 \vee \cdots \vee 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a_{j_0} = 0.
\end{aligned}$$

与 a_{j_0} 是原子相矛盾, 故必有 $t = k$. □ 5.83

Example 65.



比如布尔代数 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle$, 其中

$$S = \{a, b, c\}.$$

对 $\mathscr{P}(S)$ 中的元素 $\{a, b\}$ 来说, $\{a\}$, $\{b\}$ 是满足 "$\preccurlyeq \{a, b\}$" 的所有原子, 有

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

类似地,

$$\{a, c\} = \{a\} \cup \{c\},$$
$$\{b, c\} = \{b\} \cup \{c\},$$
$$\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}.$$

这些表示为原子的并的形式当然是惟一的.

5.84

引理 4
设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

分析 这从含义上是不难理解的. b 的 "原子表达式"

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$$

是惟一的.

对任意的原子 a, 它要么是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 其中之一, 要么不在其中.

易知,

$$a \preccurlyeq b \text{ 和 } a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中有且仅有一个成立. **证** 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

1. 若 $a \wedge b = 0$, 即 $a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0$, 根据引理 1,

$$a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0 \Longleftrightarrow a \preccurlyeq \overline{b}$$

2. 若 $a \wedge b = a$, 由格的性质有

$$a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \preccurlyeq b.$$

下面证明两式仅有一个成立.

假设 $a \preccurlyeq b$ 和 $a \preccurlyeq \bar{b}$ 同时成立, 则

$$a \preccurlyeq b \wedge \bar{b},$$

即 $a = 0$, 这与 a 是原子矛盾. □ 5.85

Theorem 66 (Stone 表示定理)**.** 设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是由有限布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 所诱导的有限布尔代数, S 是布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中所有原子的集合, 则

$$\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle \text{ 和 } \langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle \text{ 同构}.$$

证明的主要思路 (具体证明略):

1. 作映射 $f : A \to \mathscr{P}(S)$,
   - 当 $a = 0$ 时, $f(a) = \varnothing$;
   - 当 $a \neq 0$ 时, $f(a) = S_i$, S_i 表示所有满足 $x \preccurlyeq a$ 的原子 x 的集合. 然后证明 f 是双射.
2. 证明 f 是同构映射:

$$\begin{aligned} f(a \vee b) &= f(a) \cup f(b), \\ f(a \wedge b) &= f(a) \cap f(b), \\ f(\overline{a}) &= \overline{f(a)}. \end{aligned}$$

5.86

Stone 表示定理

推论 1

有限布尔格的元素的个数必等于 2^n, 其中 n 是布尔格中所有原子的个数.

推论 2

元素的个数相同的有限布尔代数是同构的.

5.87

Example 67. 设 $\langle S, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$\begin{aligned} \overline{y} \preccurlyeq \overline{x} &\iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0 \\ &\iff \overline{y} \wedge x = 0 \\ &\iff x \wedge \overline{y} = 0 \\ &\iff x \preccurlyeq y. \end{aligned}$$

故在任何布尔代数中, $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$. □ 5.88

布尔表达式

Definition 68. 设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是布尔代数, 称 A 中的元素为布尔常元. 以 A 为取值范围的变元叫布尔变元.

Definition 69. 设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是布尔代数, 在其上的布尔表达式 (Boolean expressions) 定义为:

1. A 中任何元素 (即布尔常元) 是布尔表达式;
2. 任何布尔变元是一个布尔表达式;
3. 若 e_1, e_2 是布尔表达式, 则 $\overline{e_1}$, $e_1 \vee e_2$, $e_1 \wedge e_2$ 也都是布尔表达式;
4. 只有通过有限次运用规则 (2), (3) 所构造的符号串是布尔表达式.

☞ 我们见过类似的定义方式: 命题演算的合式公式; 谓词演算的合式公式. 5.89

Example 70. 设 $\langle \{0, a, b, 1\}, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是布尔代数, 则

$$a, \tag{39}$$

$$1 \vee x_1, \tag{40}$$

$$(1 \vee x_1) \wedge x_2, \tag{41}$$

$$(a \wedge x_2) \vee (b \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_3), \tag{42}$$

都是布尔表达式, 这里 x_1, x_2, x_3 是布尔变元.

并且 (40), (41), (42) 式分别称为

- 含有单个变元 x_1 的布尔表达式;
- 含有两个变元 x_1, x_2 的布尔表达式;
- 含有三个变元 x_1, x_2, x_3 的布尔表达式. 5.90

n 元布尔表达式

Definition 71. 一个含 n 个相异变元的布尔表达式, 称为 n 元布尔表达式, 记作

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元.

Definition 72 (布尔表达式的值)**.** 设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是布尔代数. n 元布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值是指: 将 A 中的布尔常元作为变元 x_i 的值来代替表达式中相应的变元 (即对变元赋值), 从而计算得出的表达式的值. 5.91

n 元布尔表达式

Example 73. 设布尔代数 $\langle\{0,\,1\},\vee,\wedge,^{-}\rangle$ 上的一个 3 元布尔表达式为

$$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\wedge(\overline{x_2\vee x_3}).$$

当赋值为 $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$ 时, 其值为:

$$\begin{aligned}E(1,0,\,1)&=(1\vee 0)\wedge(\overline{1}\vee\overline{0})\wedge\overline{(0\vee 1)}\\&=1\wedge 1\wedge 0\\&=0.\end{aligned}$$

5.92

布尔表达式的等价

Definition 74. 设 $E_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $E_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是布尔代数 $\langle A,\vee,\wedge,^{-}\rangle$ 上的两个 n 元布尔表达式, 如果对 n 个变元的任意赋值均相等, 即对任意赋值 $x_i=\widetilde{x_i}$, $\widetilde{x_i}\in A$ 均有

$$E_1(\widetilde{x_1},\,\widetilde{x_2},\,\cdots,\,\widetilde{x_n})=E_2(\widetilde{x_1},\,\widetilde{x_2},\,\cdots,\,\widetilde{x_n}),\tag{43}$$

则称布尔表达式 E_1, E_2 是等价的. 记作:

$$E_1(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)=E_2(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n).\tag{44}$$

☞ 这类似于定义 “命题公式的等价”、“谓词公式的等价”. 5.93

Example 75. 在布尔代数 $\langle\{0,\,1\},\vee,\wedge,^{-}\rangle$ 上的两个布尔表达式

$$E_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge\overline{x_3}),\tag{45}$$

$$E_2(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge(x_2\vee\overline{x_3}),\tag{46}$$

容易验证, 它们是等价的. 比如

$$\begin{aligned}E_1(0,1,1)&=(0\wedge 1)\vee(0\wedge\overline{1})=0\wedge 0=0,\\E_2(0,1,1)&=0\wedge(1\vee\overline{1})=0,\end{aligned}$$

等等.

或者直接由运算规律验证:

$$\begin{aligned}E_2(x_1,x_2,x_3)&=x_1\wedge(x_2\vee\overline{x_3})\\&=(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge\overline{x_3})&&\text{(分配律)}\\&=E_1(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

5.94

布尔函数

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式, 因为运算 $\vee$, $\wedge$, $^{-}$ 在 A 上封闭, 任意有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ $(a_i \in A)$, 可以对应着布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个值, 这个值必属于 A.

因此, $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 确定了一个由 A^n 到 A 的函数.

Definition 76. 设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, 一个由 A^n 到 A 的函数如果能用 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式来表示, 则称该函数为布尔函数.

一个由 A^n 到 A 的函数并不是一定能用 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个布尔表达式表示. 5.95

Example 77. 设 $A = \{0, 1\}$, 下面的表格表示了一个从 A^3 到 A 的函数 f.

	f
$\langle 0, 0, 0 \rangle$	0
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	0
$\langle 0, 1, 0 \rangle$	1
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	0
$\langle 1, 0, 0 \rangle$	1
$\langle 1, 0, 1 \rangle$	1
$\langle 1, 1, 0 \rangle$	0
$\langle 1, 1, 1 \rangle$	1

容易验证其布尔函数表达式为:

$$E(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3).$$

5.96

小项 & 大项

在给出下一个定理之前, 我们先给出小项、大项、析取范式、合取范式的概念.

Definition 78. 一个含有 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的布尔表达式, 如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n} \tag{47}$$

其中 $\widetilde{x_i}$ 是 x_i 或 $\overline{x_i}$ 中的任一个, 则我们称这个布尔表达式为小项.

如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n} \tag{48}$$

则我们称这个布尔表达式为大项.

每个位置 x_i 或 $\overline{x_i}$ 必出现且仅出现一次. 和命题逻辑里的定义完全一样, 后面的很多概念均是如此. 5.97

小项 & 大项

- 两个布尔变元 x_1, x_2 可构成 2^2 个小项和 2^2 个大项;

小项	二进制下标	十进制下标	大项	二进制下标	十进制下标
$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	m_{00}	m_0	$x_1 \vee x_2$	M_{00}	M_0
$\overline{x_1} \wedge x_2$	m_{01}	m_1	$x_1 \vee \overline{x_2}$	M_{01}	M_1
$x_1 \wedge \overline{x_2}$	m_{10}	m_2	$\overline{x_1} \vee x_2$	M_{10}	M_2
$x_1 \wedge x_2$	m_{11}	m_3	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	M_{11}	M_3

- n 个布尔变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 可构成 2^n 个小 (大) 项. 5.98

析取范式 & 合取范式

Definition 79. 形如

$$m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_t \tag{49}$$

的布尔表达式称为析取范式;

形如

$$M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_t \tag{50}$$

的布尔表达式称为合取范式.

其中 m_i 表示小项, M_i 表示大项, $i = 1, 2, \cdots, t$.

☞ 简言之,

- 析取范式: 小项之并;
- 合取范式: 大项之交. 5.99

Theorem 80. 对于两个元素的布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$, 任意一个从 $\{0, 1\}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数都是布尔函数.

证 对于一个从 $\{0, 1\}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数, 先用那些使函数值为 1 的有序 n 元组分别构造小项

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n}, \tag{51}$$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i, & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 1, \\ \overline{x_i} & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 0. \end{cases}$$

然后, 再由这些小项所构成的析取范式, 它就是给定函数对应的布尔表达式, 从而该函数是布尔函数. □ ☞ 注: 当然, 也可用那些使函数值为 0 的有序 n 元组分别构造大项

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n}, \tag{52}$$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i, & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 0, \\ \overline{x_i} & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 1. \end{cases}$$

由这些大项所构成的合取范式, 也是给定函数对应的布尔表达式. □ 5.100

Example 81. 求由下表所给定的函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式、合取范式.

	f	构造小项	构造大项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 0, 0, 1\rangle$	0		$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$\langle 0, 1, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 0, 1, 1\rangle$	0		$x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$\langle 1, 1, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

解 函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

解 合取范式:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \\ & \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3). \end{aligned}$$

□ 5.101

一般布尔代数上的析 (合) 取范式

布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的布尔表达式的析取范式、合取范式可以扩充到一般的布尔代数上.

Definition 82. 设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上任一布尔表达式.

- 若 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能表示成

$$(a_0 \wedge m_0) \vee (a_1 \wedge m_1) \vee \cdots \vee (a_t \wedge m_t), \tag{53}$$

  则称形如 (53) 式的布尔表达式为析取范式;

- 若 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能表示成

$$(a_0 \vee M_0) \wedge (a_1 \vee M_1) \wedge \cdots \wedge (a_t \vee M_t), \tag{54}$$

  则称形如 (54) 式的布尔表达式为合取范式.

其中 a_i 表示布尔常元, m_i 表示小项, M_i 表示大项, $i = 1, 2, \cdots, t$. 5.102

Theorem 83. 设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上任一布尔表达式, 则它一定可化为析 (合) 取范式.

(证明略.)

☞ 作为布尔代数的直接应用, 命题逻辑可用布尔代数

$$\langle\{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$$

来描述.

一个原子命题可视为一个布尔变元, 其值非 **T** 即 **F**. 因此, 任一复合命题都能用布尔代数

$$\langle\{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$$

中的一个布尔函数来表示. 5.103

练习

将布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的布尔表达式

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \tag{55}$$

化为合取范式.

解

$$\begin{aligned} E(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \\ &= (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \\ &= (x_1 \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee x_3) \vee ((x_1 \wedge \overline{x_1}) \vee x_2 \vee x_3) \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \\ &= M_0 \wedge M_2 \wedge M_4. \end{aligned}$$

或者用列表的方式确定大项. **解**

	$E(x_1, x_2, x_3)$	构造大项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 0, 0, 1\rangle$	1	
$\langle 0, 1, 0\rangle$	0	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 0, 1, 1\rangle$	1	
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1\rangle$	1	
$\langle 1, 1, 0\rangle$	1	
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	

得 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$. □ 5.104

习题

设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的一个布尔表达式. 试写出 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式和合取范式.

解　对 $E(x_1, x_2, x_3)$ 写出其对应的函数表, 然后构造小项、大项:

	$E(x_1, x_2, x_3)$	构造小项	构造大项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	0		$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 0, 0, 1\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$	
$\langle 0, 1, 0\rangle$	0		$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 0, 1, 1\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$	
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$	
$\langle 1, 1, 0\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

解　$E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式:

$$\begin{aligned} E(x_1, x_2, x_3) =& \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee \left(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \\ & \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right). \end{aligned}$$

$E(x_1, x_2, x_3)$ 的合取范式:

$$E(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right).$$ □

5.105