Chapter 8

命题逻辑

Discrete Mathematics

November 24, 2011

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

8.1

Contents

8.2

数理逻辑简介

- 研究人的思维形式和规律的科学称为逻辑学. 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为
  - 形式逻辑
  - 辨证逻辑
  - 数理逻辑
- 数理逻辑是运用数学方法研究推理的科学.

  – 数理逻辑又叫符号逻辑, 因为它的主要工具是符号体系.
  – 数理逻辑的核心是把逻辑推理符号化, 即变成象数学演算一样的逻辑演算.

- 在本课程中主要介绍命题逻辑和谓词逻辑.

8.3

关于逻辑的故事

一人在寻找真理, 别人问他: “你真的不知道真理是什么吗? ” 那个人说: “当然! ”

别人又问: “你既然不知道真理是什么, 当你找到真理的时候, 你又如何辨别出来呢? 如果你辨别得出真理与否, 那说明你已经知道了真理是什么, 又何来寻找呢? ”

8.4

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝就不是万能的, 因为有一块石头他举不起来.

如果上帝不能创造出一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝也不是万能的, 因为有一块石头他创造不出来.

所以无论上帝是否能创造出这么一块石头, 他都不是万能的.

8.5

关于逻辑的故事

据传, 古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人, 向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律. 双方签了一个合同, 结束学业之后, 学生付给老师一半学费, 另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司, 再支付.

可是学生一直没有打赢官司, 剩下的一半学费老师迟迟没有拿到. 老师终于等不及了, 就向法庭起诉, 要学生支付另一半学费.

老师说: “如果你打赢这场官司, 依照合同, 你得把另一半学费付给我; 如果你打输这场官司, 那么根据法庭判决, 你也得把另一半学费付给我. 所以, 不管你这场官司是赢是输, 你都要把学费给我.”

学生反驳道: “如果我打输这场官司, 依照合同, 我不需要把另一半学费付给你; 如果我打赢这场官司, 那么根据法庭判决, 我也不需要把另一半学费付给你. 所以, 不管我这场官司是赢是输, 我都不需要把学费给你.”

8.6

关于逻辑的故事

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告:“欢迎你加入推理俱乐部! 只要你通过推理取得一张申请表, 就可以获得会员资格了!”

只见桌子上摆着两个盒子: 一个圆盒子, 一个方盒子.

[1]此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

圆盒子上写着一句话:"申请表不在此盒中". 方盒子上写着一句话:"这两句话中只有一句是真话".

那么申请表在哪个盒子里呢?

- 设方盒子上写的话 ("这两句话中只有一句是真话") 是真的, 推出圆盒子上的话 ("申请表不在此盒中") 是假的. 推出申请表在圆盒子中.
- 设方盒子上的话 ("这两句话中只有一句是真话") 是假的, 推出圆盒子上的话也是假的. 推出申请表在圆盒子中.
- 或者方盒子上的话是真的, 或者方盒子上的话是假的. 总之, 申请表在圆盒子中.

8.7

数理逻辑的简单历史 —— 三个阶段

0. Aristotle: 形式逻辑 (古典逻辑).
1. 初始阶段: (1660s — 19 世纪末) 将数学应用于逻辑 (Leibniz, George Boole, De Morgan). Leibniz
2. 过度阶段: (19 世纪末 — 1940 前后) 逻辑应用于数学.
3. 成熟阶段: (1930s — 1970s) 成为数学的独立分支.

8.8

1 命题及其符号化

1.1 命题与命题变元

命题 (propositions *or* statements)

- 命题是非真即假的陈述句.
  - 首先判定它是否为陈述句;
  - 其次判断它是否有惟一的真值.
- 真值只有两个: 真或假[2]3> 只有说法 "真值为真" 或 "真值为假" —— 没有 "假值" 一说.. 记作 True 和 False. 分别用符号 **T** 和 **F** 表示. (也经常分别用 1 和 0 表示.)

8.9

Example 1. 判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数. ✔
2. $\sqrt{2}$ 是无理数. ✔
3. x 大于 y. ✗
4. 外太空有生命. ✔

---

[2] <

5. 明年元旦武汉是晴天. ✔
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话. (悖论) ✗

8.10

简单命题 & 复合命题

根据命题的构成形式, 可以将命题分为:

- 简单命题: 只由一个主语和一个谓语构成的最简单的陈述句, 称为简单命题, 或原子命题或原子 (atoms).
- 复合命题: 由原子命题和命题联结词构成. 也称为分子命题.

Example 2. <2>

- "明天下雪"、"4 是素数" 都是原子命题.
- "明天下雪或明天下雨" 是复合命题.

8.11

命题的符号化

- 可以用以下两种形式将命题符号化:
  - 用大写字母; 例如, P: 今天天气晴好.
  - 用数字. 例如, [17]: 今天天气晴好.
- 上述的 P 和 [17] 称为命题标识符.

8.12

命题常量, 命题变元, 指派

- 命题常量 *(proposition constants)* —— 表示具体命题的命题标识符. 例如, P: 今天天气晴好. 则 P 是命题常量.
- 命题变元 *(proposition variable)* —— 未指定具体命题、可以代表任意命题的命题标识符. 比如讨论运算规律时使用的命题标识符. 命题变元不是命题.
- 指派 *(assignments)* —— 命题变元用一个特定命题取代, 从而成为一个命题, 这个过程称为对命题变元进行指派. 集合 $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ 是命题变元的值域.

8.13

1.2 命题联结词

联结词

$$\boxed{\text{原子命题} + \text{联结词} = \text{复合命题}}$$

联结词是复合命题的重要组成部分, 又称为逻辑运算符. 常用的有五种:

- 否定 $\neg$
- 合取 $\wedge$
- 析取 $\vee$
- 蕴含 $\rightarrow$
- 等价 $\leftrightarrow$

8.14

否定 ¬

Definition 3 (否定 (negation)). • 设 P 为命题, 则 P 的否定是一个新的命题, 记为 $\neg P$, 读做 “非 P”.

• 若 P 为 **T**, 则 $\neg P$ 为 **F**; 若 P 为 **F**, 则 $\neg P$ 为 **T**.

P	$\neg P$
T	**F**
F	**T**

8.15

合取 ∧

Definition 4 (合取 (conjunction)). • 如果 P 和 Q 是命题, 那么 “P 并且 Q” 也是命题, 记为 $P \wedge Q$, 或 $P \times Q$ 称为 P 与 Q 的合取, 读做 “P 与 Q” 或 “P 并且 Q”.

• $P \wedge Q$ 真值为 **T**, 当且仅当 P 和 Q 真值都为 **T**.

P	Q	$P \wedge Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

8.16

Example 5. 设 P: 这些都是男生; 则 $\neg P$: 这些不都是男生. (不能写成 “这些都不是男生”. Why?)

Example 6. <3> P: 2 是素数, Q: 2 是偶数; 则 $P \wedge Q$: 2 是素数, 并且是偶数. 8.17

析取 ∨

Definition 7 (析取 (disjunction)). • 如果 P 和 Q 是命题, 那么 “P 或 Q” 也是命题, 记为 $P \vee Q$, 或 $P + Q$ 称为 P 与 Q 的析取, 读做 “P 或 Q”.

• $P \vee Q$ 真值为 **T**, 当且仅当 P 或 Q 至少有一个真值为 **T**.

P	Q	$P \vee Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

☞“或” 的语意: “可兼或”, “排斥或”(也称异或, 不可兼或), 表示大概、大约. 8.18

“可兼或”(inclusive-or) 和 “排斥或”(exclusive-or)

Example 8. 将下列命题符号化:

1. 张三爱唱歌或爱听音乐;
2. 张三在 202 房间或 203 房间.

解: (1) 设 P: 张三爱唱歌, Q: 张三爱听音乐; 这里的 “或” 是 “可兼或”, 也称为 “相容或”, 即两者可以同时为真, 因此可以符号化为 $P \vee Q$. 解: (2) 设 U: 张三在 202 房间, V: 张三在 203 房间. 如果也符号化为 $U \vee V$, 张三就同时在两个房间, 这违背题意. 这里的 “或” 是 “排斥或”. 要达到只能在一个房间的要求, 可用多个联结词符号化为

$$(U \wedge \neg V) \vee (\neg U \wedge V)$$

return ☞ 析取指的是 “可兼或”.

8.19

Example 9. 将下列命题符号化:

1. 小王是跳远冠军或百米赛跑冠军.
2. 小王在宿舍或在图书馆.
3. 选小王或小李中的一人当班长.

解:

1. $P \vee Q$. (可兼或) 其中 P: 小王是跳远冠军. Q: 小王是百米赛跑冠军.
2. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. (排斥或) 其中 P: 小王在宿舍. Q: 小王在图书馆.
3. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. (排斥或) 其中 P: 选小王为班长. Q: 选小李当班长.

8.20

蕴含 $\rightarrow$

Definition 10 (蕴含 (implication)).

- 给定两个命题 P 和 Q, 其蕴含命题是一个复合命题, 记作 $P \rightarrow Q$, 读作 “P 蕴含 Q” 或 “如果 P, 那么 Q” 或 “若 P, 则 Q”.
- 当且仅当 P 的真值为 **T**, Q 的真值为 **F** 时, $P \rightarrow Q$ 的真值为 **F**.
- 称 P 为前件 (或前题), Q 为后件 (或结论).

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

8.21

关于 $P \to Q$ 真值表的注解

- 在自然语言中, "如果 P, 那么 Q" 中的前件 P 与后件 Q 往往具有某种内在联系. 而在数理逻辑中, P 与 Q 可以无任何内在联系. 例如: ☞ 如果雪是黑的, 那么太阳从西方出来.
- 在数学或其它自然科学中, "如果 P, 那么 Q" 往往表达的是前件 P 为真, 后件 Q 也为真的推理关系. 但在数理逻辑中, 作为一种 "善意推定" 的规定, 当 P 为假时, 无论 Q 是真是假, $P \to Q$ 均为真. 也就是说, 只有 P 为 **T** 并且 Q 为 **F** 这一种情况, 才能使得复合命题 $P \to Q$ 为 **F**.

☞ 什么是 "善意的推定"? 8.22

善意的推定

Example 11. 张三对李四说: "若我去图书馆, 我一定帮你借那本书". 可以将这句话表示为命题 $P \to Q$ (P: 张三去图书馆, Q: 张三借那本书). 后来张三因有事未去图书馆, 即 P 为 **F**, 此时按规定 $P \to Q$ 为 **T**. 我们可理解为张三讲了真话, 即他要是去图书馆, 我们相信他一定会为李四借书. 这就是所谓 "善意的推定". 8.23

Example 12. 将下列命题符号化:

1. 只要天不下雨, 我就骑自行车上班.
2. 只有天不下雨, 我才骑自行车上班.

解: 设 P: 天下雨, Q: 我骑自行车上班.

1. $\neg P \to Q$. (天不下雨是骑车上班的充分条件.)
2. $Q \to \neg P$, 或 $P \to \neg Q$. (如果骑自行车上班, 一定是天不下雨.) 8.24

Example 13. 将下列命题符号化:

1. 除非今天天气好, 否则我不会去公园.
2. 我将去镇上, 仅当我有时间.

解: ① 含义: 我去公园必定是天气好, 至于天气好是否去公园, 在命题中没有涉及.

设 P: 今天天气好. Q: 我去公园.

$$Q \to P.$$

② 设 P: 我将去镇上. Q: 我有时间.

$$P \to Q.$$ 8.25

注

以下句式均可符号化为 $P \to Q$:

- "如 P, 则 Q",
- "因为 P, 所以 Q",
- "只要 P, 就 Q",
- "P, 仅当 Q", (我将去镇上, 仅当我有时间时.)
- "只有 Q, 才 P", (只有天不下雨, 我才骑自行车上班.)
- "除非 Q, 才 P",
- "除非 Q, 否则非 P". (除非天气好, 否则我不会去公园的.)

8.26

等价 $\leftrightarrow$

Definition 14 (等价 (two-way-implication)).

- 给定两个命题 P 和 Q, 其复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称作等价命题, 读作 "P 当且仅当 Q".
- $P \leftrightarrow Q$ 为 **T**, 当且仅当 P 和 Q 同时为 **T**, 或同时为 **F**.
- 等价联结词 "$\leftrightarrow$" 也可以记作 "$\rightleftarrows$" 或 "iff".

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

8.27

Example 15. 分析下列各命题的真值:

1. $2+2=4$, 当且仅当 3 是奇数.
2. $2+2=4$, 当且仅当 3 不是奇数.
3. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 是奇数.
4. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 不是奇数.

解: 设 P: $2+2=4$. Q: 3 是奇数.

1. $P \leftrightarrow Q$, 真值为 **T**. (因 P, Q 皆为真);
2. $P \leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **F**. (因 P 为真, $\neg Q$ 为假);
3. $\neg P \leftrightarrow Q$, 真值为 **F**. (因 $\neg P$ 为假, Q 为真);
4. $\neg P \leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **T**. (因 $\neg P, \neg Q$ 皆为假).

8.28

Example 16. 设 P: 天下雨, Q: 草木枯黄. 则

$\neg P$**:** 天不下雨;
$\neg P \wedge Q$**:** 天不下雨并且草木枯黄;
$\neg P \vee Q$**:** 天不下雨或草木枯黄;
$\neg P \to Q$**:** 如果天不下雨, 那么草木枯黄;
$\neg P \leftrightarrow Q$**:** 天不下雨当且仅当草木枯黄.

8.29

小结

1. 命题是客观上能判明真假的陈述句. 当命题为真时, 称命题的真值为 “真”; 否则, 说命题的真值为 “假”.
2. 析取联结词 $\vee$ 指的是 “可兼或”; 而汉语中的 “或”, 既可以用于 “可兼或”, 也可用于 “排斥或”.
3. 复合命题 $P \to Q$ 表示的逻辑关系是: Q 是 P 的必要条件, P 是 Q 的充分条件.
    - 在数学中, “如 P, 则 Q” 往往要求前件为真, 后者为真的推理关系.
    - 但在数理逻辑中规定: 当前件为假, 不论后件为真为假, 均有 $P \to Q$ 为真.

8.30

练习 (答案: ① A. ② A, D. ③ A, D.)

多项选择:

1. 设 P: 天热. Q: 我去游泳. R: 我在家读书. 则命题 “如天热, 我去游泳, 否则在家读书.” 的符号化结果是 ( ). (A) $(P \to Q) \vee (\neg P \to R)$; (B) $(P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$; (C) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$; (D) $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge R)$.
2. 设 P: 我上街. Q: 我有空闲时间. 则命题 “我上街, 仅当我有空闲时间.” 的符号化结果是 ( ). (A) $P \to Q$; (B) $Q \to P$; (C) $\neg P \to \neg Q$; (D) $\neg Q \to \neg P$.
3. 设 P: 我上街. Q: 我有空闲时间. 则命题 “除非我有空闲时间, 否则我不上街.” 的符号化结果是 ( ). (A) $P \to Q$; (B) $Q \to P$; (C) $\neg P \to \neg Q$; (D) $\neg Q \to \neg P$.

8.31

2 命题公式

2.1 命题公式及其真值

命题公式

Definition 17 (命题公式 (合式公式))**.** 以下条款规定了命题公式 (proposition formula) 的含义:

(1) 真值 0, 1 是命题公式;

(2) 命题常元、命题变元是命题公式;

(3) 如果 A 是命题公式, 那么 $\neg A$ 也是命题公式;

(4) 如果 A 和 B 是命题公式, 那么 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式;

(5) 只有有限次地应用 (1)~(4) 构成的符号串, 才是命题公式.

命题公式又称为*合式公式* (Wff, Well formed formula). 8.32

Example 18. • 下列公式都是命题公式:

$$\neg(P \wedge Q)$$
$$\neg(P \to Q)$$
$$\big(P \to (P \vee \neg Q)\big)$$
$$\Big(\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T)\Big)$$

- 下列都不是命题公式:

$$(P \to Q) \to (\wedge Q)$$
$$\big(P \to Q, (P \wedge Q) \to Q\big)$$

约定: 最外层的圆括号可以省略. 8.33

联结词运算的秩序

- 运算符结合力的强弱顺序约定为: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.
  - 没有括号时按强弱先后顺序执行.
  - 相同运算符按从左至右顺序执行, 括号可省去. 例如, $A \vee (B \vee C)$ 与 $A \vee B \vee C$ 运算顺序一样.
  - 最外层的括号总可以省去. 例如, $(A \wedge B)$ 常写为 $A \wedge B$.
- 要养成"先 $\wedge$ 后 $\vee$" 的习惯.

Example 19. <2> 例如, 下列两式的运算顺序完全一样:

$$\big((\neg P \vee \neg S) \vee (\neg Q \wedge R)\big) \to \big((R \vee P) \vee Q\big) \tag{1}$$
$$\neg P \vee \neg S \vee \neg Q \wedge R \to R \vee P \vee Q \tag{2}$$

8.34

命题的翻译

命题符号化应注意以下几点:

- 确定句子是否为命题;
- 正确表示原子命题和选择命题联结词;
- 要按逻辑关系翻译而不能凭字面翻译. 例如翻译:
  - Tom 和 Jerry 是好朋友.
  - 蓝色和黄色可以调配成绿色.

8.35

命题的翻译

Example 20. 符号化下列命题:

1. 张三不是不聪明, 而是不用功.
2. 李文与李武是兄弟.
3. 除非你努力, 否则你将失败.
4. 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

解: ① $\neg P \wedge Q$, 其中 P: 张三不聪明. Q: 张三不用功. 解: ② P,P: 李文与李武是兄弟. (原子命题.) 解: ③ $\neg P \to Q$, 其中 P: 你努力. Q: 你将失败. 解: ④ $Q \to (\neg P \to R)$. 或者 $\neg P \to (Q \to R)$; 或者 $(\neg P \wedge Q) \to R$ 其中 P: 我很累. Q: 我上街. R: 我去书店看看. 8.36

真值表的构造

Example 21. 构造 $\neg P \vee Q$ 的真值表.

解:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**

8.37

真值表的构造

Example 22. 构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**

- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值全为真, 这类公式为永真公式, 记为 **T**. (另有永假公式, 记为 **F**.)
- $\neg(P \wedge Q)$ 与 $(\neg P \vee \neg Q)$ 的所有真值相同, 称二者是等价的. 8.38

2.2 命题公式的等值式

公式的等价

Definition 23 (公式的等价)**.** 若命题公式 A 和 B 的所有真值全都相同, 则称 A 和 B 等值或逻辑等价. 记作 $A \Leftrightarrow B$.

注: $A \Leftrightarrow B$, 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真公式.

如: $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值全为真, 则

$$\neg(P \wedge Q) \quad 与 \quad (\neg P \vee \neg Q)$$

是等价的或逻辑相等. 反之亦然. 8.39

用真值表证明公式等价

Example 24. 试证 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$.

证: 列出真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \to Q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

可知 $\neg P \vee Q$ 与 $P \to Q$ 真值相同, 所以 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$.

☞ 牢记本题结论: $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$. 8.40

Example 25. 证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 真值相同, 得证二者等价.

☞ 记住这个简单的结论. 8.41

Example 26. 证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**

$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 真值相同, 得证二者等价.

☞ 建议记住这个结论: 这是 $\leftrightarrow$ 向 $\vee, \wedge$ 的转化式. 8.42

常用的等价公式:

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	1
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P,\ P \wedge P \Leftrightarrow P$	2
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	3
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P,\quad P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	4
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	5
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P,\quad P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	6
德 · 摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	7
同一律	$P \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow P,\ P \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow P$	8
零律	$P \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T},\ P \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	9
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathbf{T},\ P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathbf{F}$	10

8.43

常用等价公式的记忆

- 从含义上理解记忆.
- 对比集合的运算律记忆.

分配律	$P\vee(Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q)\wedge(P \vee R)$ $P\wedge(Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q)\vee(P \wedge R)$	$P\cup(Q \cap R) = (P \cup Q)\cap(P \cup R)$ $P\cap(Q \cup R) = (P \cap Q)\cup(P \cap R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	$P \cup (P \cap Q) = P$ $P \cap (P \cup Q) = P$
德 · 摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	$\sim(P \cup Q) = \sim P \cap \sim Q$ $\sim(P \cap Q) = \sim P \cup \sim Q$

- 同一律、零律、否定律中的 $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ 可分别对比集合中的空集 $\varnothing$, 全集.

8.44

Example 27. 证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. (不使用真值表.)

证:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q\big) \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge P\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)\big) \vee \big((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)
\end{aligned}
$$

8.45

置换

Definition 28. <1-> 如果 X 是合式公式 A 的一部分, 且 X 本身也是一个合式公式, 则称 X 为公式 A 的子公式.

Theorem 29 (置换规则 Rule of Replacement)**.** *<2-> 设 X 是合式公式 A 的子公式, 且 $X \Leftrightarrow Y$. 将 A 中的 X 用 Y 来置换, 得到新的公式 B. 则 $A \Leftrightarrow B$.*

即, 如果

$$\underbrace{X \wedge P \vee Q \cdots}_{A} \xrightarrow{X \Leftrightarrow Y} \underbrace{Y \wedge P \vee Q \cdots}_{B}$$

则 $A \Leftrightarrow B$. 8.46

例如

- 在 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 中以 $A \wedge B$ 代 P 得
$$(A \wedge B) \vee Q \Leftrightarrow Q \vee (A \wedge B)$$
- 或以 $\neg C$ 代 P, 同时, 以 $\neg A \wedge B$ 代 Q 得
$$\neg C \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee \neg C$$

8.47

2.3 命题公式的逻辑蕴含式

重言式 (tautology)

Definition 30 (重言式 (tautology))**.** 重言式即永真公式: 无论对分量作怎样的指派, 其对应的真值永为 **T**.

例如, $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 是重言式.

<u>注</u>

- 任何两个重言式的合取或析取, 仍然是一个重言式. (A 为 **T**, B 为 **T**, A 与 B 析取 (或合取) 仍为 **T**.)
- 一个重言式, 对同一分量都用任何 Wff 置换, 其结果仍为一重言式. (因为重言式的真值与分量的指派无关.)

8.48

矛盾式 (contradiction *or* absurdity)

- 矛盾式即永假公式, 记为 **F**.
  - 任何两个矛盾式的合取或析取, 仍然是一个矛盾式.
  - 一个矛盾式, 对同一分量都用任何 Wff 置换, 其结果仍为一矛盾式.

8.49

重言式 v.s 等价

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**

- $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$.
- $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ 是重言式.

Theorem 31. *<2> 设 A, B 是两个 Wff. $A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 为一个重言式.* 8.50

蕴含式

Definition 32. 当且仅当命题公式 $P\to Q$ 为重言式时, 称 " P 蕴含 Q", 记为 $P\Rightarrow Q$, 它又称为逻辑蕴含式 (logically implication).

蕴含式的理解

符号 $\Rightarrow$ 不是联结词, 它表示公式间的 "永真蕴含" 关系, 也可以看成是 "推导" 关系.

即 $P\Rightarrow Q$ 可以理解成: 由 P 可推出 Q. (即由 P 为真, 可以推出 Q 也为真.)

> 当 $P\to Q$ 为永真时, 则认为 "由 P 可推出 Q", 即 "P 蕴含 Q".

8.51

证明蕴含式 $P\Rightarrow Q$ 的方法

方法 1. 列真值表, 证明 $P\to Q$ 为永真式 (略).

下面讨论另外两种方法.

先看 $P\to Q$ 的真值表: 如果 $P\to Q$ 为永真式, 则下述真值表的第二组指派不会出现.

P	Q	$P\to Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

于是有下面两种证明方法.

方法 2. 假设前件 P 为 **T**, 推出后件 Q 也为 **T**.

方法 3. 假设后件 Q 为 **F**, 推出前件 P 也为 **F**. 8.52

证明 $\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \vee Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$.

证: 设 $P \to R$ 为假, 则 P 为真, 且 R 为假.

- 若 Q 为真, 则 $Q \to R$ 为假;
- 若 Q 为假, 则 $P \to Q$ 为假.

故 $(P \to Q) \wedge (Q \to R)$ 为假.

8.53

方法 2. 假设前件为 **T**, 推出后件也为 **T**.

Example 33. 求证: $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 设前件 $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**. 则

$$\big((A \wedge B) \to C\big), \quad \neg D, \quad (\neg C \vee D)$$

均为 **T**.

由 $\neg D$ 为 **T**, 则 D 为 **F**.

又 $\neg C \vee D$ 为 **T**, 得 $\neg C$ 为 **T**, 即 C 为 **F**.

又 $\big((A \wedge B) \to C\big)$ 为 **T**, 得 $A \wedge B$ 为 **F**.

而 $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$, 所以 $\neg A \vee \neg B$ 为 **T**. 得证.

8.54

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 34. 求证: $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $\big((A \wedge B) \to C\big)$ 为 **F**, 所以前件 $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
   (a) 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**, 所以前件 $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
   (b) 若 D 为 **F**, 则 $\neg C \vee D$ 为 **F**, 所以前件 $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.

   综上得证.

(或者先讨论 D 的真值, 也可以证明.)

8.55

常用逻辑蕴含式

$P \wedge Q \Rightarrow P$	1
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	2
$P \Rightarrow P \vee Q$	3
$\neg P \Rightarrow P \to Q$	4
$Q \Rightarrow P \to Q$	5
$\neg (P \to Q) \Rightarrow P$	6
$\neg (P \to Q) \Rightarrow \neg Q$	7
$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$	8
$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$	9
$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	10
$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$	11
$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \Rightarrow R$	12
$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge S)$	13
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	14

8.56

Theorem 35. 设 P, Q 为任意两个命题公式, $P \Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

证: 若 $P \Leftrightarrow Q$, 则 $P \leftrightarrow Q$ 为重言式. 因为

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P),$$

故 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 皆为 **T**, 即

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

反之, 若 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$, 则 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 皆为 **T**, 从而 $P \leftrightarrow Q$ 为 **T**, 即 $P \leftrightarrow Q$ 为重言式, 亦即 $P \Leftrightarrow Q$. 8.57

蕴含式的性质

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式, 则 B 必为重言式.

证: 因为 $A \to B$ 为永真式, 所以, 当 A 为永真时, B 必为永真 (否则与 $A \to B$ 为永真相矛盾).

(2) 若 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$.

证: 由 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \to B$, $B \to C$ 为永真式, 从而 $(A \to B) \wedge (B \to C)$ 亦为永真式.

由常用蕴含式 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$, 及性质 (1), 得 $A \to C$ 是永真式, 亦即 $A \Rightarrow C$. 8.58

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

证: 设 A 的真值为 **T**, 由于 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 B, C 为 **T**, 从而 $B \wedge C$ 为 **T**, 故 $A \to B \wedge C$ 为 **T**, 从而 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$, 则 $A \vee C \Rightarrow B$.

证: 因 $A \to B$ 和 $C \to B$ 为 **T**, 那么 $(A \to B) \wedge (C \to B)$ 为 **T**. 而

$$\begin{aligned}(A \to B) \wedge (C \to B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg(A \vee C) \vee B \\ &\Leftrightarrow (A \vee C) \to B.\end{aligned}$$

故 $A \vee C \to B$ 为永真, 从而 $A \vee C \Rightarrow B$. 8.59

证明 $\neg A \to (B \vee C)$, $D \vee E$, $(D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,
又由 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $B \vee C$ 为 **T**.
得证 $\neg A \to (B \vee C)$, $D \vee E$, $(D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

反证: 设后件 $B \vee C$ 为 **F**.
又 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $\neg A$ 为 **F**.
而 $(D \vee E) \to \neg A$ 为 **T**, 则 $D \vee E$ 为 **F**.
这与 $D \vee E$ 为 **T** 矛盾. 假设不成立. 得证. 8.60

2.4 全功能联结词集合

最小联结词组: $\{\neg, \vee\}$; $\{\neg, \wedge\}$;

由 "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\to$", "$\leftrightarrow$" 组成的命题公式, 必可以由仅包含 $\{\neg, \vee\}$ 或 $\{\neg, \wedge\}$ 的命题公式替代.

$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
$\to$	$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
$\vee$	$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

8.61

3 范式及其应用

3.1 析取范式与合取范式

对偶式

Definition 36 (对偶式)**.** 设给定的命题公式 A 仅含联结词 $\neg, \wedge, \vee$. A^* 为将 A 中符号 $\wedge$, $\vee$, **T**, **F** 分别改换为 $\vee$, $\wedge$, **F**, **T** 后所得的公式. 那么称 A^* 为 A 的对偶式 (dual).

比如, $A = (\neg P \vee Q) \wedge R$ 的对偶式为

$$A^* = (\neg P \wedge Q) \vee R.$$

8.62

Theorem 37. 设公式 A 和 A^* 中仅含命题变元 $P_1, \cdots, P_n$, 及联结词 $\neg, \wedge, \vee$; 则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{3}$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{4}$$

此定理是德 · 摩根律的推广.

比如设 $A(P, Q) = P \vee Q$, 则 $A^*(P, Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$. 而

$$\neg A(P, Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \tag{5}$$

$$A^*(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \tag{6}$$

所以

$$\neg A(P, Q) \Leftrightarrow A^*(\neg P, \neg Q).$$

8.63

Theorem 38 (对偶原理)**.** 设 A^*, B^* 分别是命题公式 A, B 的对偶式. 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

比如分配律:

$$\underbrace{P \vee (Q \wedge R)}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}_{B}$$

$$\underbrace{P \wedge (Q \vee R)}_{A^*} \Leftrightarrow \underbrace{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}_{B^*}$$

证: 设 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$, 按等价定义可知

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{7}$$

是永真式. 那么

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{8}$$

也为永真式. 所以

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n). \tag{9}$$

根据前一定理中 (2) 式, 得

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n). \tag{10}$$

故 $A^* \Leftrightarrow B^*$. ($\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 当且仅当 $A \Leftrightarrow B$.) □ 8.64

合取范式

Definition 39 (合取范式)**.** 一个命题公式称为合取范式 (conjunctive normal form), 当且仅当它具有形式:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{11}$$

其中 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 都是由命题变元或其否定构成的析取式.

例如

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \tag{12}$$

是合取范式 (整体是合取式, 各部分是析取式.). 8.65

析取范式

Definition 40 (析取范式)**.** 一个命题公式称为析取范式 (conjunctive normal form), 当且仅当它具有形式:

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{13}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定构成的合取式.

例如

$$\neg P \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \tag{14}$$

是析取范式 (整体是析取式, 各部分是合取式.). 8.66

Example 41. 求 $(P \to Q) \to P$ 的析取范式和合取范式.

解: 析取范式:

$$\begin{aligned}(P \to Q) \to P &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to P && (\text{去} \to)\\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee P\\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P.\end{aligned}$$

合取范式:

$$\begin{aligned}(P \to Q) \to P &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P\\ &\Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) && (\text{分配律})\\ &\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee P).\end{aligned}$$

8.67

求析取范式或合取范式的步骤:

1. 将命题公式中的联结词全部化为 $\neg, \wedge, \vee$;
2. 利用德 · 摩根律, 将否定符号 $\neg$ 直接移到各命题变元之前;
3. 利用分配律、结合律将命题公式化为析取范式或合取范式. 8.68

练习

求下列命题的析取范式和合取范式:

$$Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big). \tag{15}$$

解: 求析取范式:

$$\begin{aligned}&Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big)\\ \Leftrightarrow\ &Q \wedge (\neg(P \vee \neg Q) \vee R) && (\text{消去} \to)\\ \Leftrightarrow\ &Q \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee R\big) && (\text{内移} \neg)\\ \Leftrightarrow\ &\big(Q \wedge (\neg P \wedge Q)\big) \vee (Q \wedge R) && (\text{分配律})\\ \Leftrightarrow\ &(\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R).\end{aligned}$$

解: 求合取范式:

$$
\begin{aligned}
& Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee R\big) && (\text{消去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge \big((\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R).
\end{aligned}
$$

8.69

3.2 主范式

为什么要讨论 "主范式"?

下面将讨论 "主范式"(主析取范式, 主合取范式), 这是因为一个命题的析取范式或合取范式并不是惟一的.

例如 $P \vee (Q \wedge R)$ 是一个析取范式, 但它也可以写成

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

主范式的研究, 使得命题公式可以转化为一个标准形式, 从而易于判断命题公式的性质特征.

在引入主范式的讨论时, 还要涉及小项、大项的概念. 8.70

布尔合取 *or* 小项

Definition 42. n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的合取式, 称作布尔合取或小项, 在任一小项中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,

(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现且仅出现一次.

Example 43. 例如, 两个变元 P 和 Q 的所有小项为:

$$P \wedge Q,\ P \wedge \neg Q,\ \neg P \wedge Q,\ \neg P \wedge \neg Q.$$

一般地, n 个命题变元共有 2^n 个小项.

Example 44. n 个变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的小项形如:

$$\underbrace{(\quad) \wedge (\quad) \wedge \cdots \wedge (\quad)}_{n},$$

其中的第 i 个括号内, 只能填上 P_i 和 $\neg P_i$ 之中的一个, 所有不同的填法共有 2^n 个.

所以, n 个命题变元共有 2^n 个小项. 8.71

小项的真值

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

- 没有两个小项是等价的;
- 每个小项都只有一个真值为 **T**. (这是合取式本身的特点.) 8.72

P	0	0	0	0	1	1	1	1	
Q	0	0	1	1	0	0	1	1	
R	0	1	0	1	0	1	0	1	
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0	$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0	$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0	$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0	$m_{011} = \neg P \wedge Q \wedge R$
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0	$m_{100} = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0	$m_{101} = P \wedge \neg Q \wedge R$
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0	$m_{110} = P \wedge Q \wedge \neg R$
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1	$m_{111} = P \wedge Q \wedge R$

小项 & 编码: 小项真值为 T 时, 对应的一组真值指派.

- 表中的 0, 1 分别代表真值 **F**, **T**.
- 二进制编码也可以转为十进制, 如 $m_{001} \triangleq m_1$, $m_{010} \triangleq m_2$, $m_{011} \triangleq m_3$.

8.73

小项的性质

1. 当真值指派与编码相同时[3], 小项真值为 **T**, 在其余均为 **F**. 例如:
$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R,$$
$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R.$$
2. 任意两个不同小项的合取式为永假[4]2-> 任意两个不同小项中至少出现一对 P_i, $\neg P_i$..
3. 全体小项的析取式为永真[5]3-> 对任意一组真值指派, 都有 (且仅有) 一个小项真值为 **T**., 记为:
$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

8.74

主析取范式

Definition 45. 对于给定的命题公式 A, 如果存在公式 A' 满足

1) $A' \Leftrightarrow A$;
2) A' 仅由小项的析取所组成.

则称 A' 为 A 的主析取范式 (major disjunctive normal form).

- 例如
$$P \to Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q),$$
这里 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 就是 $P \to Q$ 的主析取范式.

8.75

[3] 真值 **T** 和 **F** 分别记为 1 和 0.

[4] <

[5] <

主析取范式

Theorem 46. 在真值表中，一个公式的真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式.

Example 47.

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$\neg P\wedge\neg Q$	$P\to Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**

$$P\to Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q).$$

证: 记 B 为“公式 A 真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取”, 下证 $A\Leftrightarrow B$:

- 若 A 在某一指派下, 真值为 **T**, 则必有 B 中的某个小项真值为 **T**, 所以此时 B 真值为 **T**.
- 对 A 为 **F** 的某一指派, 其对应的小项不包含在 B 中, 故此时 B 真值为 **F**.

8.76

☞ 实际使用真值表求主析取范式时, 并不需要列出所有的小项.

如使用下表可求得 $P\to Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$.

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$\neg P\wedge\neg Q$	$P\to Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**

也可以简化为:

P	Q	$P\to Q$	
T	**T**	**T**	➠ $P\wedge Q$
T	**F**	**F**	
F	**T**	**T**	➠ $\neg P\wedge Q$
F	**F**	**T**	➠ $\neg P\wedge\neg Q$

8.77

Example 48. 求 $P\vee Q$, $\neg(P\wedge Q)$ 的主析取范式. 解: 由真值表

P	Q	$P\vee Q$	$\neg(P\wedge Q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

得

$$P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q),$$
$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

return 8.78

Example 49. 设公式 A 的真值如下表所示, 求 A 的主析取范式.

P	Q	R	A
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

解: 公式 A 的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

☞ 注意这也是研究主范式的一个用途: 已知公式为真和为假的赋值, 写出该公式的表达式. 8.79

用等价公式构成主析取范式

Example 50. 求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ 的主析取范式.

解:

$$\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)\\
\Leftrightarrow\ &\big(P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)\big) \vee \big(\neg P \wedge R \wedge (Q \vee \neg Q)\big) \vee \big(Q \wedge R \wedge (P \vee \neg P)\big)\\
\Leftrightarrow\ &\big(P \wedge Q \wedge R\big) \vee \big(P \wedge Q \wedge \neg R\big) \vee \big(\neg P \wedge R \wedge Q\big) \vee \big(\neg P \wedge R \wedge \neg Q\big).
\end{aligned}$$

8.80

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

解:

$$\begin{aligned}
&P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)\\
\Leftrightarrow\ &\neg P \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)\big) && (\text{去} \to)\\
\Leftrightarrow\ &\neg P \vee \big((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)\big) && (\text{分配律})\\
\Leftrightarrow\ &\neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P)\\
\Leftrightarrow\ &\neg P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) \vee (P \wedge Q) && (\text{否定律})\\
\Leftrightarrow\ &\neg P \vee \mathbf{F} \vee (P \wedge Q) && (\text{零律})\\
\Leftrightarrow\ &\neg P \vee (P \wedge Q) && (\text{同一律})\\
\Leftrightarrow\ &\big(\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)\big) \vee (P \wedge Q) && (\text{添加项})\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)\,.
\end{aligned}$$

8.81

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \lor ((\neg P \lor Q) \land (Q \land P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \lor (\neg P \lor Q)\big) \land \big(\neg P \lor (Q \land P)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \lor \neg P \lor Q) \land \big((\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \lor Q \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \land (Q \lor \neg Q)\big) \lor ((P \lor \neg P) \land Q) && (\text{添加项}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q)\,.
\end{aligned}
$$

☞ 重要的步骤在于: 去 $\to$, 添加项. 8.82

利用等价公式求主析取范式的步骤:

1. 化归为析取范式 (总的方向);
2. 除去析取范式中所有永假的析取式 (同一律);
3. 将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并 (幂等律);
4. 对合取项补入没有出现的命题变元 (如添加 $(P \lor \neg P)$ 式), 再用分配律展开. 8.83

布尔析取 *or* 大项

Definition 51. n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的析取式, 称作布尔析取或大项, 其中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,
(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现, 且仅出现一次.

Example 52. <2> 例如, 两个变元 P 和 Q 的大项为:

$$P \lor Q,\ P \lor \neg Q,\ \neg P \lor Q,\ \neg P \lor \neg Q.$$

一般地, n 个命题变元共有 2^n 个大项. 8.84

大项 & 编码

- 使得该大项真值为 0 的一组指派.
- 二进制编码也可以转为十进制, 如 $M_{000} \triangleq M_0$, $M_{101} \triangleq M_5$, $M_{111} \triangleq M_7$. 8.85

大项的性质

(i) 当真值指派与编码相同时[6], 大项真值为 **F**, 在其余均为 **T**. 例如:

$$M_{001} = P \lor Q \lor \neg R, \tag{16}$$

$$M_{010} = P \lor \neg Q \lor R. \tag{17}$$

[6]真值 **T** 和 **F** 分别记为 1 和 0.

P	0	0	0	0	1	1	1	1	
Q	0	0	1	1	0	0	1	1	
R	0	1	0	1	0	1	0	1	
$P \vee Q \vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1	$M_{000} = P \vee Q \vee R$
$P \vee Q \vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1	$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R$
$P \vee \neg Q \vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1	$M_{010} = P \vee \neg Q \vee R$
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1	$M_{011} = P \vee \neg Q \vee \neg R$
$\neg P \vee Q \vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1	$M_{100} = \neg P \vee Q \vee R$
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1	$M_{101} = \neg P \vee Q \vee \neg R$
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1	$M_{110} = \neg P \vee \neg Q \vee R$
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0	$M_{111} = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

(ii) 任意两个不同大项的析取式为永真[7].

(iii) 全体大项的合取式为永假, 记为:

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

8.86

主合取范式

Definition 53 (主合取范式)**.** 对于给定的命题公式 A, 如果存在公式 A' 满足

1) $A' \Leftrightarrow A$;
2) A' 仅由大项的合取所组成.

则称 A' 为 A 的主合取范式 (major conjunctive normal form).

8.87

主合取范式

Theorem 54. 在真值表中, 一个公式的真值为 **F** 的指派所对应的大项的合取, 即为此公式的主合取范式.

Example 55.

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q).$$

8.88

利用真值表求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 的主析取范式与主合取范式.

解

[7]对任意一组真值指派, 有且仅有一个大项真值为 **F**.

P	Q	R	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**

主析取范式: $(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$ $=m_{111}\vee m_{110}\vee m_{011}\vee m_{001}\triangleq m_7\vee m_6\vee m_3\vee m_1\triangleq\sum_{1,3,6,7}$.[1ex] 主合取范式: $(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$ $=M_{101}\wedge M_{100}\wedge M_{010}\wedge M_{000}\triangleq M_5\wedge M_4\wedge M_2\wedge M_0\triangleq\prod_{0,2,4,5}$.

☞ 主析取范式与主合取范式的简记式中的下标是"互补"的. *Why?* 8.89

为什么编码是"互补"的?

命题公式的真值只有 **T** 和 **F**. 与 **T** 对应的真值指派做了小项的编码, 剩下的是 **F** 对应的真值指派, 作为大项的编码, 这两部分是"互补"的. (合起来就是全部的真值指派.)

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow\sum_{1,3,6,7}\Leftrightarrow\prod_{0,2,4,5}$.

P	Q	R	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$		
T	**T**	**T**	**T**	$(P\wedge Q\wedge R)$	$m_{111}=m_7$
T	**T**	**F**	**T**	$(P\wedge Q\wedge\neg R)$	$m_{110}=m_6$
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P\vee Q\vee\neg R)$	$M_{101}=M_5$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P\vee Q\vee R)$	$M_{100}=M_4$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P\wedge Q\wedge R)$	$m_{011}=m_3$
F	**T**	**F**	**F**	$(P\vee\neg Q\vee R)$	$M_{010}=M_2$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$	$m_{001}=m_1$
F	**F**	**F**	**F**	$(P\vee Q\vee R)$	$M_{000}=M_0$

☞ 发现规律了没有? 由真值表, 如果只需要写出主析取范式或主合取范式的简记式, 那就太简单了! 8.90

知道主析取范式, 直接写出主合取范式?

如果已经得到了主析取范式, 可以直接写出主合取范式: 对主析取范式中没有出现的小项组合, 将 $\wedge$ 换为 $\vee$, P_i 换为 $\neg P_i$, 而 $\neg P_j$ 换为 P_j, 即得到构成主合取范式的所有大项.

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow\sum_{1,3,6,7}\Leftrightarrow\prod_{0,2,4,5}$.

P	Q	R	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$	小项与大项	没有出现的小项
T	**T**	**T**	**T**	$(P\wedge Q\wedge R)$	
T	**T**	**F**	**T**	$(P\wedge Q\wedge \neg R)$	
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P\vee Q\vee \neg R)$	$P\wedge\neg Q\wedge R$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P\vee Q\vee R)$	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P\wedge Q\wedge R)$	
F	**T**	**F**	**F**	$(P\vee\neg Q\vee R)$	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$	
F	**F**	**F**	**F**	$(P\vee Q\vee R)$	$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$

理论支持? $\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$. 怎么理解? 8.91

验证 $\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$.

记 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ 为 $A(P,Q,R)$.

P	Q	R	$A(P,Q,R)$	小项与大项	A 中没有出现的小项	$\neg A(P,Q,R)$
T	**T**	**T**	**T**	$(P\wedge Q\wedge R)$		**F**
T	**T**	**F**	**T**	$(P\wedge Q\wedge \neg R)$		**F**
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P\vee Q\vee \neg R)$	$P\wedge\neg Q\wedge R$	**T**
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P\vee Q\vee R)$	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	**T**
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P\wedge Q\wedge R)$		**F**
F	**T**	**F**	**F**	$(P\vee\neg Q\vee R)$	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	**T**
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$		**F**
F	**F**	**F**	**F**	$(P\vee Q\vee R)$	$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	**T**

可见 A 中没有出现的小项, 构成 $\neg A(P,Q,R)$ 的小项.

$$\begin{aligned}
A(P,Q,R) &\Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R),\\
\neg A(P,Q,R) &\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R),\\
A^*(P,Q,R) &\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R),\\
A^*(\neg P,\neg Q,\neg R) &\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R).
\end{aligned}$$

8.92

Example 56. 求 $(P\to Q)\wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$\begin{aligned}
&(P\to Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\vee Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge Q)\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge(P\vee\neg P))\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge\neg P)\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge Q)\\
\Leftrightarrow\ &m_{01}\vee m_{11}=\sum\nolimits_{1,3}.
\end{aligned}$$

主合取范式为:

$$\begin{aligned}
&(P\to Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\vee Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\vee Q)\wedge((P\wedge\neg P)\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ &(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ &M_{00}\wedge M_{10}\\
=\ &\prod\nolimits_{0,2}.
\end{aligned}$$

由于主析取范式与主合取范式的简记式中的下标是“互补”的, 因此也可由其中一个直接求另一个. 8.93

练习

利用编码的互补性, 求 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解:

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) && \text{(主合取范式)} \\ &= M_{10} \wedge M_{01} \\ &= \prod\nolimits_{1,2} \\ &\Leftrightarrow \sum\nolimits_{0,3} \\ &= m_{00} \vee m_{11} \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q). && \text{(主析取范式)} \end{aligned}$$

8.94

3.3 范式的应用

范式的应用

(1) 判定二命题公式是否等值. $P \Leftrightarrow Q$ 当且仅当 P 与 Q 有相同的主析 (合) 取范式.

(2) 判定命题公式的类型. 设 P 是含有 n 个变元的命题公式:

   (a) P 为重言式, 当且仅当 P 的主析取范式中含有 2^n 个小项.

   (b) P 为永假式, 当且仅当 P 的主合取范式中含有 2^n 个大项.

(3) 求命题公式的成真和成假赋值.

8.95

用将合式公式化为范式的方法证明下列两式是等价的:

$$(A \to B) \wedge (A \to C), \quad A \to (B \wedge C).$$

解: 由

$$\begin{aligned} (A \to B) \wedge (A \to C) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C), \\ A \to (B \wedge C) &\Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C) \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C), \end{aligned}$$

得

$$(A \to B) \wedge (A \to C) \Leftrightarrow A \to (B \wedge C).$$

8.96

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$;

解: (a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge Q) \vee \overbrace{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}\text{[8]} && \text{(主析取范式)} \\
=\ & \textstyle\sum_{1,2,3} \\
\Leftrightarrow\ & \textstyle\prod_{0} \\
=\ & P \vee Q.\text{[9]} && \text{(主合取范式 (只含一个大项!))}
\end{aligned}
$$

8.97

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P)) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} \wedge (\mathbf{T} \vee \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} && \text{(重言式)} \\
\Leftrightarrow\ & \textstyle\sum_{0,1,2,3} \\
=\ & (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \text{(主析取范式)}
\end{aligned}
$$

可见 $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$ 是重言式. (没有主合取范式.)

8.98

Example 57. A, B, C, D 四个人中要派两个人出差, 按下述三个条件有几种派法? 如何派?

1. 若 A 去则 C 和 D 中要去一人;
2. B 和 C 不能都去;
3. C 去则 D 要留下.

[1]注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2]前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. 见前例.

解: 设 A: A 派出. 其他类似设定. 则派出的三个条件为

$$A \to (C \bigtriangledown D), \quad \neg(B \wedge C), \quad C \to \neg D.$$

往下求使命题

$$\big(A \to (C \bigtriangledown D)\big) \wedge \big(\neg(B \wedge C)\big) \wedge (C \to \neg D) \tag{18}$$

为 **T** 的真值指派.

可以通过主析取范式求解, 也可以借助真值表求解. (见下一页) 8.99

注意到 "四个人中要派两个人", 所以真值表中只列出真值指派有 2 个为真的情形:

A	B	C	D	$\big(A \to (C \bigtriangledown D)\big) \wedge \big(\neg(B \wedge C)\big) \wedge (C \to \neg D)$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0

注意到表中公式真值为 1 所对应的真值指派, 得派出方式有三种:

$$A \wedge C, \qquad A \wedge D, \qquad B \wedge D.$$

8.100

4 命题演算的推理理论

有效结论

在逻辑学中把从所谓前提的一些命题出发, 依据公认的推理规则, 推导出所谓结论的一个命题的过程称为有效推理或形式证明, 所得结论叫做有效结论.

Definition 58 (有效结论)**.** 设 A 和 C 是两个命题公式. 当且仅当

$$A \to C \text{ 为一重言式, 即 } A \Rightarrow C,$$

称 "C 是 A 的有效结论". 或 "C 可由 A 逻辑地推出".

注意: 不是正确结论. 比如

如果猪会飞, 那么太阳从西边出来.

是重言式. 而命题 "太阳从西边出来" 的真值为 **F**. 8.101

Definition 59 (推广到有 n 个前提的情形)**.** 设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 和 C 是命题公式, 当且仅当

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

称 C 是 "一组前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的有效结论".

注

- 在形式证明中重要的是推理的有效性, 而不在于结论是否真实;
- 所谓 "推理有效" 是指, 结论是前提的合乎逻辑的结果.

8.102

论证方法

判别有效结论的过程就是论证过程. 论证方法有

1. 真值表法;
2. 直接证法;
3. 间接证法:
   - 反证法;
   - CP 规则.

8.103

真值表法

要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$ 是否成立, 使用真值表有两个方法:

1. 对于每一个 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 真值均为 **T** 的行, C 也有真值 **T**. (前件为真, 后件也为真.)
2. 对于每一个 C 的真值为 **F** 的行, $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 的真值中至少有一个为 **F**. (后件为假, 前件也为假.)

8.104

Example 60. 一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠, 或者是由于计算有错误; 这份统计表格的错误不是由于材料不可靠, 所以这份统计表格是由于计算有错误.

解: 设 P: 统计表格的错误是由于材料不可靠; Q: 统计表格的错误是由于计算有错误. 则有

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q.$$

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge (P \vee Q)$
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

从真值表看到: 当 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的真值都为 **T** 时 (在第三行), Q 也为 **T**. 所以 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

或者由: 当 Q 的真值为 **F** 时, $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的至少有一个为 **F**.

☞本题证明的是一个常用蕴含式, 本质上就是我们常用的排除法.

8.105

Example 61. 如果张老师来了, 这个问题可以得到解答; 如果李老师来了, 这个问题也可以得到解答. 总之张老师或李老师来了, 这个问题就可以得到解答.

解: 设 P: 张老师来了; Q: 李老师来了; R: 这个问题可以得到解答. 则有

$$(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R.$$

P	Q	R	$P \to R$	$Q \to R$	$P \vee Q$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**

从真值表看到: 当 $P \to R$, $Q \to R$ 和 $P \vee Q$ 的真值都为 **T** 时 (在第一、三、五行), R 也为 **T**. 所以 $(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$. (☞ 二段推论) 8.106

直接证明法

直接证明法就是由一组前提, 利用一些公认的推理规则, 根据已知的等价公式或蕴含公式, 推演得到有效的结论.

- P 规则 (前提引入): 前提在推导过程中的任何时候都可以引入.
- T 规则 (结论引用): 在推导中, 如果有一个或多个公式重言蕴涵着公式 S (结论), 则公式 S 可以引入推导之中.

常用的蕴含公式和等价公式, 是推理证明的基础. 8.107

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$ 若 $P \wedge Q$ 为真, 则 P 为真.
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$ 若 $\neg P$ 为真, 即 P 为假, 则 $P \to Q$ 为真.
6. $Q \Rightarrow P \to Q$

8.108

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P, P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

(7) $P \to Q$ 为假, 只能是 P 为真, Q 为假. (7) 或者

$$\begin{aligned} \neg(P \to Q) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \\ &\Rightarrow P \ \text{(或} \Rightarrow \neg Q). \end{aligned}$$

(9) 合取引入. (10) 析取三段论, 或 "选言推理", "排除法". (11) 假言推理, 最常用的推理规则. (12) 设 $\neg Q$ 为真, 即 Q 为假; 要 $P \to Q$ 为真, 则 P 必须为假. 得 $\neg P$ 为真. 此为 "拒取式", 即 "反证法".

8.109

常用蕴含式

13. $P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$
14. $P \vee Q, P \to R, Q \to R \Rightarrow R$
15. $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
16. $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

(13) 假言三段论. 表明推理的传递性. (14) 假设 $P \vee Q, P \to R, Q \to R$ 为真.

- 若 P 为真, 要 $P \to R$ 为真, 必 R 为真.
- 若 P 为假, 则 Q 为真. 要 $Q \to R$ 为真, 必 R 为真.

(15)

$$\begin{aligned} &(A \vee C) \to (B \vee C) \\ \Leftrightarrow\ &\neg(A \vee C) \vee (B \vee C) \\ \Leftrightarrow\ &(\neg A \wedge \neg C) \vee (B \vee C) \\ \Leftrightarrow\ &(\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee B \vee C) \\ \Leftrightarrow\ &(\neg A \vee B \vee C) \\ \Leftrightarrow\ &(A \to B) \vee C \end{aligned}$$

由 I_3, 知

$$(A \to B) \Rightarrow (A \to B) \vee C$$

8.110

常用等价式

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$	对合律
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
3. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
5. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
6. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	分配律
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	

8.111

常用等价式

8. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ 德 · 摩根律
9. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
10. $P \vee P \Leftrightarrow P$ 幂等律
11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
12. $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$ 同一律
13. $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
14. $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$ 零律
15. $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$

8.112

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

☞下证 E_{19} 和 E_{22}. 8.113

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$.

证:

$$
\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{结合律}) \\
&\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R && (\text{德 · 摩根律}) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R && (E_{16})
\end{aligned}
$$

$P \to (Q \to R) \not\Leftrightarrow (P \to Q) \to R.$ 8.114

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, 有

$$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{19}$$

又

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \,\bar{\vee}\, Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{20}$$

由 (19) 式和 (20) 式知

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q.$$

(☞ 或用真值表, 也很简捷.) 8.115

形式推理的表上作业

形式推理的具体操作可在包含 3 列的一张表上进行:

- 第一列是序号, 将各次操作按先后排序;
- 第二列是断言或命题公式, 内容可以是前提, 中间结论或最终结论;
- 第三列是注释或根据, 表明所引用的推理规则及与之有关的行的编号.

证明 $\neg(P\wedge\neg Q),\ \neg Q\vee R,\ \neg R\Rightarrow\neg P$.

(1)	$\neg R$	P
(2)	$\neg Q\vee R$	P
(3)	$\neg Q$	T(1),(2) I
(4)	$\neg(P\wedge\neg Q)$	P
(5)	$\neg P\vee Q$	T(4) E
(6)	$\neg P$	T(3),(5) I

8.116

形式推理的表上作业

为什么可以这样表示?

- 蕴含式 $P\Rightarrow Q$ 的证明方法之一就是: 假设前件 P 为 **T**, 能够推得后件 Q 也为 **T**.
- 第二列所列命题公式, 均是真值为 **T** 的. (只是省略, 不言自明而已.)

证明 $\neg(P\wedge\neg Q),\ \neg Q\vee R,\ \neg R\Rightarrow\neg P$.

(1)	$\neg R$	P
(2)	$\neg Q\vee R$	P
(3)	$\neg Q$	T(1),(2) I
(4)	$\neg(P\wedge\neg Q)$	P
(5)	$\neg P\vee Q$	T(4) E
(6)	$\neg P$	T(3),(5) I

8.117

Example 62. 证明 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\Rightarrow S\vee R$.

证:

(1)	$P\vee Q$	P
(2)	$\neg P\to Q$	T(1) E
(3)	$Q\to S$	P
(4)	$\neg P\to S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg S\to P$	T(4) E
(6)	$P\to R$	P
(7)	$\neg S\to R$	T(5),(6) I
(8)	$S\vee R$	T(7) E

8.118

Example

证明 $(W\vee R)\to V,\ V\to C\vee S,\ S\to U,\ \neg C\wedge\neg U\Rightarrow\neg W$.

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(9)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(10)	$(W \vee R) \rightarrow (C \vee S)$	T(8),(9) I
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(7),(10) I
(12)	$\neg W \wedge \neg R$	T(11) E
(13)	$\neg W$	T(12) I

8.119

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$.

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(9)	$\neg V$	T(7),(8) I
(10)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(9),(10) I
(12)	$\neg W \wedge \neg R$	T(11) E
(13)	$\neg W$	T(12) I

8.120

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$.

注意: 在上述证明中, 反复用到了 I_{12}:

$$\neg Q,\ P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$$

8.121

相容 & 不相容

“相容” 与 “不相容”

设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现于前提 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 中的全部命题变元.

- 对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一些真值指派, 如果能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值为 **T** , 则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是相容的.
- 如果对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的每一组真值指派, 使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值均为 **F**, 则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是不相容的.

8.122

间接证明法之一: 反证法

要证

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C,$$

记作

$$S \Rightarrow C,$$

即

$$S \to C, \text{ 或 } \neg S \vee C$$

为 **T**, 故 $S \wedge \neg C$ 为 **F**. 即 S 与 $\neg C$ 不相容.

因此要证 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$, 只要证 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 与 $\neg C$ 是不相容的.

☞ 这其实就是我们经常使用的反证法. 8.123

间接证明法之一: 反证法

Example 63. 证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P
(3)	B	T(1),(2) I
(4)	$\neg(B \vee C)$	P
(5)	$\neg B \wedge \neg C$	T(4) E
(6)	$\neg B$	T(5) I
(7)	$B \wedge \neg B$ (矛盾)	T(3),(6) I

8.124

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V, V \to C \vee S, S \to U, \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$.

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I
(9)	S	T(6),(8) I
(10)	$S \to U$	P
(11)	U	T(10) I
(12)	$\neg U$	T(7) I
(13)	$U \wedge \neg U$(矛盾)	T(11),(12) E

8.125

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

由 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$, 知

$$S \to (R \to C) \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C. \tag{23}$$

从而, 要证明 $S \Rightarrow (R \to C)$, 转化为证明

$$(S \wedge R) \Rightarrow C. \tag{24}$$

这就是 CP 规则 (Conditional Proof).

这里, 将 R 称为附加前提.

8.126

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 64. 证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P
(5)	$(B \to C)$	T(3),(4) I
(6)	B	P
(7)	C	T(5),(6) I
(8)	$D \to C$	CP

8.127

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S), P \to Q, \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I
(4)	$Q \to (\neg R \to S)$	P
(5)	$\neg R \to S$	T(3),(4) I
(6)	$\neg R$	P
(7)	S	T(5),(6) I
(8)	$P \to S$	CP

Example 65. 在某研讨会的休息时间, 3 名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断:

- 甲说王教授不是南京人, 是上海人;
- 乙说王教授不是上海人, 是南京人;
- 丙说王教授既不是上海人, 也不是杭州人.

听完以上 3 人的判断后, 王教授笑着说, 他们 3 人中有一人说的全对, 有一人说对了一半, 另一人说的全不对. 试分析王教授是哪里人?

解: 设 N: 王教授是南京人, S: 王教授是上海人, H: 王教授是杭州人; 且

- 甲的判断为 $\neg N \wedge S$,
- 乙的判断为 $N \wedge \neg S$,
- 丙的判断为 $\neg S \wedge \neg H$.

进一步设

- 甲的判断全对 $B_1 = \neg N \wedge S$,
- 甲的判断对一半 $B_2 = (\neg N \wedge \neg S) \vee (N \wedge S)$,
- 甲的判断全错 $B_3 = N \wedge \neg S$,
- 乙的判断全对 $C_1 = N \wedge \neg S$,
- 乙的判断对一半 $C_2 = (N \wedge S) \vee (\neg N \wedge \neg S)$,
- 乙的判断全错 $C_3 = \neg N \wedge S$,
- 丙的判断全对 $D_1 = \neg S \wedge \neg H$,
- 丙的判断对一半 $D_2 = (\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)$,
- 丙的判断全错 $D_3 = S \wedge H$.

由王教授所说

$$\begin{aligned} E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \\ \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \end{aligned} \tag{25}$$

为真命题.

而

$$\begin{aligned} (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) &= (\neg N \wedge S) \wedge \big((N \wedge S) \vee (\neg N \wedge \neg S)\big) \wedge (S \wedge H) \\ &\Leftrightarrow \big((\neg N \wedge S \wedge N \wedge S) \vee (\neg N \wedge S \wedge \neg N \wedge \neg S)\big) \wedge (S \wedge H) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{F} \vee \mathbf{F}) \wedge (S \wedge H) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{F} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 &= (\neg N \wedge S) \wedge (\neg N \wedge S) \wedge \big((\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)\big) \\ &\Leftrightarrow (\neg N \wedge S \wedge \neg S \wedge H) \vee (\neg N \wedge S \wedge S \wedge \neg H) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee (\neg N \wedge S \wedge \neg H) \\ &\Leftrightarrow \neg N \wedge S \wedge \neg H \end{aligned} \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
(B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) = (N \wedge \neg S) \wedge (N \wedge \neg S) \wedge \big((\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)\big) \\
&\Leftrightarrow (N \wedge \neg S \wedge \neg S \wedge H) \vee (N \wedge \neg S \wedge S \wedge \neg H) \\
&\Leftrightarrow (N \wedge \neg S \wedge H) \vee \mathbf{F} \\
&\Leftrightarrow (N \wedge \neg S \wedge H)
\end{aligned} \tag{28}
$$

类似可得 8.129

$$(B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{29}$$

$$(B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{30}$$

$$(B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{31}$$

于是, 由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg N \wedge S \wedge \neg H) \vee (N \wedge \neg S \wedge H) \tag{32}$$

因为王教授不能既是上海人, 又是杭州人, 因而 $(N \wedge \neg S \wedge H) \Leftrightarrow \mathbf{F}$.
于是只有 $(\neg N \wedge S \wedge \neg H)$ 为真命题, 即王教授是上海人.
甲说的全对, 丙说对了一半, 而乙全说错了.

这一类的推理在报纸、杂志的智力游戏里经常可以看到. 平时我们处理这类推理时并没有这么复杂. 比如: 假设"甲说的全对", 由乙与甲所说相反, 则乙说的全错, 同时丙说对了一半. 这个假设与王教授所说不矛盾, 所以假设成立, 问题解决. 或者: 王教授不可能同时是两个城市的人, 则丙至少说对了一半, 从而全错只可能是甲乙之一, 然后再来作判断. 这个例子放在这里只是为了说明一种方法. 8.130

莱布尼茨 —— "样样皆通的大师"

Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig July 1, 1646 – November 14, 1716 in Hannover), a philosopher, scientist, mathematician, diplomat, librarian, and lawyer.

- 政治家成为数学家 [1666 年法学博士学位　美因茨选侯　腓特烈公爵]
- 普遍符号语言 ["$\cup$, $\cap$; $\sim$; $\cong$, $\frac{a}{b}$"]
- 26 岁学数学 [惠更斯　计算机器　$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$]
- 创立微积分 [1677 年　$\int$ Summa　$\mathrm{d}x$　牛莱之争]
- 与中国的联系 [康熙 (1654–1722)　科学院　二进制　八卦　《中国近事》(1697)]
- 没有结婚, 没有在大学当教授
- 孤寂地离世　return 8.131