离散数学 第 9 章 谓词逻辑

Discrete Mathematics

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

November 23, 2012

个体 & 谓词

命题作为反映判断的句子, 由主语和谓语两部分组成, 这里分别称为个体和谓词:

个体 & 谓词

命题作为反映判断的句子, 由主语和谓语两部分组成, 这里分别称为个体和谓词:

- 在原子命题中所描述的对象称为个体(常用小写字母 a, b, c 表示);

个体 & 谓词

命题作为反映判断的句子, 由主语和谓语两部分组成, 这里分别称为个体和谓词:

- 在原子命题中所描述的对象称为个体(常用小写字母 a, b, c 表示);
- 用以描述个体性质或个体间关系的部分称为谓词(常用大写字母 A, B 表示).

个体 & 谓词

命题作为反映判断的句子, 由主语和谓语两部分组成, 这里分别称为个体和谓词:

- 在原子命题中所描述的对象称为个体(常用小写字母 a, b, c 表示);
- 用以描述个体性质或个体间关系的部分称为谓词(常用大写字母 A, B 表示).

例如, 若 A 表示 "是个大学生", c 表示 "张三", e 表示 "李四", 则

- $A(c)$ 表示 "张三是个大学生";
- $A(e)$ 表示 "李四是个大学生".

个体 & 谓词

命题作为反映判断的句子, 由主语和谓语两部分组成, 这里分别称为个体和谓词:

- 在原子命题中所描述的对象称为个体(常用小写字母 a, b, c 表示);
- 用以描述个体性质或个体间关系的部分称为谓词(常用大写字母 A, B 表示).

例如, 若 A 表示 "是个大学生", c 表示 "张三", e 表示 "李四", 则

- $A(c)$ 表示 "张三是个大学生";
- $A(e)$ 表示 "李四是个大学生".

☞ 这一讨论问题的方式类似于 "函数" 概念.

用谓词表达命题

- 一般来说, “x 是 A” 类型的命题可以用 $A(x)$ 表达.

用谓词表达命题

- 一般来说, “x 是 A” 类型的命题可以用 $A(x)$ 表达.
- 对于 “x 大于 y” 这种两个个体之间关系的命题, 可表达为 $B(x, y)$, 这里 B 表示谓词 “$\cdots$ 大于 $\cdots$”.

用谓词表达命题

- 一般来说, “x 是 A” 类型的命题可以用 $A(x)$ 表达.
- 对于 “x 大于 y” 这种两个个体之间关系的命题, 可表达为 $B(x, y)$, 这里 B 表示谓词 “$\cdots$ 大于 $\cdots$”.
- 我们把 $A(x)$ 称为一元谓词, $B(x, y)$ 称为二元谓词, $M(a, b, c)$ 称为三元谓词, 依次类推.

用谓词表达命题

- 一般来说, "x 是 A" 类型的命题可以用 $A(x)$ 表达.
- 对于 "x 大于 y" 这种两个个体之间关系的命题, 可表达为 $B(x, y)$, 这里 B 表示谓词 "$\cdots$ 大于 $\cdots$".
- 我们把 $A(x)$ 称为一元谓词, $B(x, y)$ 称为二元谓词, $M(a, b, c)$ 称为三元谓词, 依次类推.
- 通常把二元以上谓词称作多元谓词.

谓词 & 谓词填式

- 单独一个谓词不是完整的命题.

谓词 & 谓词填式

- 单独一个谓词不是完整的命题.
- 谓词字母后填以个体所得的式子, 称为谓词填式.

谓词 & 谓词填式

- 单独一个谓词不是完整的命题.
- 谓词字母后填以个体所得的式子, 称为谓词填式.
- 如果 A 为 n 元谓词, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是个体名称, 则 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 就成为一个命题.

谓词 & 谓词填式

- 单独一个谓词不是完整的命题.
- 谓词字母后填以个体所得的式子, 称为谓词填式.
- 如果 A 为 n 元谓词, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是个体名称, 则 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 就成为一个命题.

Example 1.1

- 命题 “x 是素数” 中, x 是个体, 谓词是 “是素数”, 记为 P, 则此谓词表达式可写为 $P(x)$.

Example 1.1

- 命题 “x 是素数” 中, x 是个体, 谓词是 “是素数”, 记为 P, 则此谓词表达式可写为 $P(x)$.
- 特别, $P(5)$ 是命题: “5 是素数”.

Example 1.1

- 命题 “x 是素数” 中, x 是个体, 谓词是 “是素数”, 记为 P, 则此谓词表达式可写为 $P(x)$.
- 特别, $P(5)$ 是命题: “5 是素数”.
- 此例中 x 表示不确定的个体, 称为个体变元; 5 是个体常元.

这里, $P(x)$ 的真值随 x 而变, 它对某些 x 可能为真, 对某些 x 可能为假.

Example 1.1

- 命题 "x 是素数" 中, x 是个体, 谓词是 "是素数", 记为 P, 则此谓词表达式可写为 $P(x)$.
- 特别, $P(5)$ 是命题: "5 是素数".
- 此例中 x 表示不确定的个体, 称为个体变元; 5 是个体常元.

这里, $P(x)$ 的真值随 x 而变, 它对某些 x 可能为真, 对某些 x 可能为假. 所以, $P(x)$ 是命题函数, 而不是命题.

简单命题函数

Definition 1.2

由① 一个谓词, ② 一些个体变元, 组成的表达式称为简单命题函数.

简单命题函数

Definition 1.2

由① 一个谓词, ② 一些个体变元, 组成的表达式称为简单命题函数.

由定义可见

- n 元谓词, 就是 “有 n 个个体变元” 的命题;

简单命题函数

Definition 1.2

由① 一个谓词, ② 一些个体变元, 组成的表达式称为简单命题函数.

由定义可见

- n 元谓词, 就是 “有 n 个个体变元” 的命题;
- 当 $n = 0$ 时, 称为 0 元谓词. 0 元谓词本身就是一个命题 (类似常数函数).

简单命题函数

Definition 1.2

由① 一个谓词, ② 一些个体变元, 组成的表达式称为简单命题函数.

由定义可见

- n 元谓词, 就是 "有 n 个个体变元" 的命题;
- 当 $n = 0$ 时, 称为 0 元谓词. 0 元谓词本身就是一个命题 (类似常数函数).
- 故命题是 n 元谓词的一个特殊情况.

复合命题函数

Definition 1.3

由一个或 n 个简单命题函数, 以及逻辑联结词 (如 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 等) 组合而成的表达式, 称为复合命题函数.

复合命题函数

Definition 1.3

由一个或 n 个简单命题函数, 以及逻辑联结词 (如 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 等) 组合而成的表达式, 称为复合命题函数.

- 逻辑联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 的意义, 与命题演算中的解释相同.

复合命题函数

Definition 1.3

由一个或 n 个简单命题函数, 以及逻辑联结词 (如 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 等) 组合而成的表达式, 称为复合命题函数.

- 逻辑联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 的意义, 与命题演算中的解释相同.
- 命题函数不是命题. 只有个体变元取特定的名称时, 才能成为一个命题.

复合命题函数

Definition 1.3

由一个或 n 个简单命题函数, 以及逻辑联结词 (如 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 等) 组合而成的表达式, 称为复合命题函数.

- 逻辑联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 的意义, 与命题演算中的解释相同.
- 命题函数不是命题. 只有个体变元取特定的名称时, 才能成为一个命题.
  例如 $Q(x, y)$ 表示 “x 比 y 重”, 当 x, y 指人或物时, 它是一个命题; 但若 x, y 指实数时, 就不是一个命题.

复合命题函数

Definition 1.3

由一个或 n 个简单命题函数, 以及逻辑联结词 (如 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 等) 组合而成的表达式, 称为复合命题函数.

- 逻辑联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrows$ 的意义, 与命题演算中的解释相同.
- 命题函数不是命题. 只有个体变元取特定的名称时, 才能成为一个命题.
  例如 $Q(x, y)$ 表示 "x 比 y 重", 当 x, y 指人或物时, 它是一个命题; 但若 x, y 指实数时, 就不是一个命题.
- 个体变元的取值范围, 对命题的真值有影响.

复合命题函数

Definition 1.3

由一个或 n 个简单命题函数, 以及逻辑联结词 (如 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrows$ 等) 组合而成的表达式, 称为复合命题函数.

- 逻辑联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrows$ 的意义, 与命题演算中的解释相同.
- 命题函数不是命题. 只有个体变元取特定的名称时, 才能成为一个命题.

  例如 $Q(x, y)$ 表示 "x 比 y 重", 当 x, y 指人或物时, 它是一个命题; 但若 x, y 指实数时, 就不是一个命题.
- 个体变元的取值范围, 对命题的真值有影响.

  例如 $R(x)$ 表示 "x 是大学生". 当 x 的讨论范围是某大学的一个班级时, $R(x)$ 为永真; 当 x 的讨论范围是某中学的一个班级时, $R(x)$ 为永假; 当 x 的讨论范围是一个剧场中的观众时, $R(x)$ 有真有假.

个体域

- 在命题函数中, 个体变元的论述范围, 称为个体域.

个体域

- 在命题函数中, 个体变元的论述范围, 称为个体域.
- 个体域可以是有限的, 也可以是无限的.

个体域

- 在命题函数中, 个体变元的论述范围, 称为个体域.
- 个体域可以是有限的, 也可以是无限的.
- 把各种个体域综合在一起作为论述范围的域, 称全总个体域.

个体域

- 在命题函数中, 个体变元的论述范围, 称为个体域.
- 个体域可以是有限的, 也可以是无限的.
- 把各种个体域综合在一起作为论述范围的域, 称全总个体域.

☞ 个体域之于命题函数, 类似定义域之于函数.

量词

- 全称量词: $\forall$, 表达 “对所有的”, “每一个”, “对任一个”.

量词

- 全称量词: $\forall$, 表达 “对所有的”, “每一个”, “对任一个”.
- 存在量词: $\exists$, 表达 “存在一些”, “至少有一个”, “对于一些”.

量词

- 全称量词: $\forall$, 表达 "对所有的", "每一个", "对任一个".
- 存在量词: $\exists$, 表达 "存在一些", "至少有一个", "对于一些".
- $\forall$ 是 Any 的第一个字母的倒写.

量词

- 全称量词: $\forall$, 表达 "对所有的", "每一个", "对任一个".
- 存在量词: $\exists$, 表达 "存在一些", "至少有一个", "对于一些".
- $\forall$ 是 Any 的第一个字母的倒写.
- $\exists$ 是 Exist 的第一个字母的反写.

Example 1.4

符号化下列命题:

1. 没有不犯错误的人.
2. 发光的不都是金子.

Example 1.4

符号化下列命题:

1. 没有不犯错误的人.
2. 发光的不都是金子.

解: ① 设 $M(x)$: x 是人. $Q(x)$: x 犯错误.

Example 1.4

符号化下列命题:

1. 没有不犯错误的人.
2. 发光的不都是金子.

解: ① 设 $M(x)$: x 是人. $Q(x)$: x 犯错误. 则命题符号化为

$$(\forall x)\big(M(x) \to Q(x)\big).$$

Example 1.4

符号化下列命题:

1. 没有不犯错误的人.
2. 发光的不都是金子.

解: ① 设 $M(x)$: x 是人. $Q(x)$: x 犯错误. 则命题符号化为

$$(\forall x)\big(M(x) \to Q(x)\big).$$

或者

$$\neg(\exists x)\big(M(x) \wedge \neg Q(x)\big).$$

Example 1.4

符号化下列命题:

1. 没有不犯错误的人.
2. 发光的不都是金子.

解: ① 设 $M(x)$: x 是人. $Q(x)$: x 犯错误. 则命题符号化为

$$(\forall x)\big(M(x) \rightarrow Q(x)\big).$$

或者

$$\neg(\exists x)\big(M(x) \wedge \neg Q(x)\big).$$

② 设 $L(x)$: x 是发光的东西. $G(x)$: x 是金子.

Example 1.4

符号化下列命题:

1. 没有不犯错误的人.
2. 发光的不都是金子.

解: ① 设 $M(x)$: x 是人. $Q(x)$: x 犯错误. 则命题符号化为

$$(\forall x)\big(M(x) \rightarrow Q(x)\big).$$

或者

$$\neg(\exists x)\big(M(x) \wedge \neg Q(x)\big).$$

② 设 $L(x)$: x 是发光的东西. $G(x)$: x 是金子. 则命题符号化为

$$(\exists x)\big(L(x) \wedge \neg G(x)\big).$$

或者

$$\neg(\forall x)\big(L(x) \rightarrow G(x)\big).$$

Example 1.5

用谓词表达式写出下列命题:

1. 小张不是工人.
2. 小莉是非常聪明和美丽的.
3. 每一个有理数是实数.
4. 某些实数是有理数.
5. 直线 a 与直线 b 平行当且仅当直线 a 与 b 不相交.

Example 1.5

用谓词表达式写出下列命题:

1. 小张不是工人.
2. 小莉是非常聪明和美丽的.
3. 每一个有理数是实数.
4. 某些实数是有理数.
5. 直线 a 与直线 b 平行当且仅当直线 a 与 b 不相交.

解: ① 设 $W(x)$: x 是工人. c: 小张. 得

$$\neg W(c).$$

Example 1.5

用谓词表达式写出下列命题:

1. 小张不是工人.
2. 小莉是非常聪明和美丽的.
3. 每一个有理数是实数.
4. 某些实数是有理数.
5. 直线 a 与直线 b 平行当且仅当直线 a 与 b 不相交.

解: ① 设 $W(x)$: x 是工人. c: 小张. 得

$$\neg W(c).$$

② 设 $C(x)$: x 是聪明的. $B(x)$: x 是美丽的. l: 小莉. 得

$$C(l) \wedge B(l).$$

Example 1.5

用谓词表达式写出下列命题:

1. 小张不是工人.
2. 小莉是非常聪明和美丽的.
3. 每一个有理数是实数.
4. 某些实数是有理数.
5. 直线 a 与直线 b 平行当且仅当直线 a 与 b 不相交.

解: ③ 设 $Q(x)$: x 是有理数. $R(x)$: x 是实数. 则

$$(\forall x)\big(Q(x) \to R(x)\big).$$

④ 设 $R(x)$: x 是实数. $Q(x)$: x 是有理数. 则

$$(\exists x)\big(R(x) \land Q(x)\big).$$

Example 1.5

用谓词表达式写出下列命题:

1. 小张不是工人.
2. 小莉是非常聪明和美丽的.
3. 每一个有理数是实数.
4. 某些实数是有理数.
5. 直线 a 与直线 b 平行当且仅当直线 a 与 b 不相交.

解: ③ 设 $Q(x)$: x 是有理数. $R(x)$: x 是实数. 则

$$(\forall x)\big(Q(x) \to R(x)\big).$$

④ 设 $R(x)$: x 是实数. $Q(x)$: x 是有理数. 则

$$(\exists x)\big(R(x) \land Q(x)\big).$$

Example 1.5

用谓词表达式写出下列命题:

1. 小张不是工人.
2. 小莉是非常聪明和美丽的.
3. 每一个有理数是实数.
4. 某些实数是有理数.
5. 直线 a 与直线 b 平行当且仅当直线 a 与 b 不相交.

解: ⑤ 设 $P(x,\ y)$: 直线 x 平行于直线 y.
$Q(x,\ y)$: 直线 x 与直线 y 相交. 则

$$P(a,\ b) \rightleftarrows \neg Q(a,\ b).$$

练习

找出下列句子所对应的谓词表达式:

1. 所有教练员是运动员　$(J(x),\ L(x))$;
2. 某些运动员是大学生　$(S(x))$;
3. 某些教练是年老的, 但是健壮的　$(O(x),\ V(x))$;
4. 金教练既不老但也不是健壮的　(j);
5. 某些大学生运动员是国家选手　$(C(x))$.

练习

找出下列句子所对应的谓词表达式:

1. 所有教练员是运动员 $(J(x),\ L(x))$;
2. 某些运动员是大学生 $(S(x))$;
3. 某些教练是年老的, 但是健壮的 $(O(x),\ V(x))$;
4. 金教练既不老但也不是健壮的 (j);
5. 某些大学生运动员是国家选手 $(C(x))$.

解: ① 设 $J(x)$: x 是教练员; $L(x)$: x 是运动员. 则

$$(\forall x)\big(J(x) \to L(x)\big).$$

练习

找出下列句子所对应的谓词表达式:

1. 所有教练员是运动员　$(J(x),\ L(x))$;
2. 某些运动员是大学生　$(S(x))$;
3. 某些教练是年老的, 但是健壮的　$(O(x),\ V(x))$;
4. 金教练既不老但也不是健壮的　(j);
5. 某些大学生运动员是国家选手　$(C(x))$.

解: ① 设 $J(x)$: x 是教练员; $L(x)$: x 是运动员. 则

$$(\forall\, x)\big(J(x) \to L(x)\big).$$

② 设 $S(x)$: x 是大学生; $L(x)$: x 是运动员. 则

$$(\exists\, x)\big(S(x) \wedge L(x)\big).$$

练习

找出下列句子所对应的谓词表达式:

1. 所有教练员是运动员 $(J(x),\ L(x))$;
2. 某些运动员是大学生 $(S(x))$;
3. 某些教练是年老的, 但是健壮的 $(O(x),\ V(x))$;
4. 金教练既不老但也不是健壮的 (j);
5. 某些大学生运动员是国家选手 $(C(x))$.

解: ③ 设 $J(x)$: x 是教练员; $O(x)$: x 是年老的; $V(x)$: x 是健壮的. 则

$$(\exists\, x)\big(J(x) \wedge O(x) \wedge V(x)\big).$$

④ 设 $O(x)$: x 是年老的; $V(x)$: x 是健壮的; j: 金教练. 则

$$\neg O(j) \wedge \neg V(j).$$

练习

找出下列句子所对应的谓词表达式:

1. 所有教练员是运动员 $(J(x),\ L(x))$;
2. 某些运动员是大学生 $(S(x))$;
3. 某些教练是年老的, 但是健壮的 $(O(x),\ V(x))$;
4. 金教练既不老但也不是健壮的 (j);
5. 某些大学生运动员是国家选手 $(C(x))$.

解: ⑤ 设 $S(x)$: x 是大学生; $L(x)$: x 是运动员; $C(x)$: x 是国家选手. 则

$$(\exists x)\big(S(x) \wedge L(x) \wedge C(x)\big).$$

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.

  例如 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.
  例如 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
- 由下列递归规则生成的公式称为谓词演算的合式公式(简称谓词公式):

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.

  例如 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

- 由下列递归规则生成的公式称为谓词演算的合式公式(简称谓词公式):
  1. 原子谓词公式是合式公式;

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.

  例如 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

- 由下列递归规则生成的公式称为谓词演算的合式公式(简称谓词公式):
  1. 原子谓词公式是合式公式;
  2. 若 A 和 B 是合式公式, 则 $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \rightleftarrows B$, $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ 是合式公式;

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.

  例如 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

- 由下列递归规则生成的公式称为谓词演算的合式公式(简称谓词公式):
  1. 原子谓词公式是合式公式;
  2. 若 A 和 B 是合式公式, 则 $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \rightleftarrows B$, $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ 是合式公式;
  3. 只有有限步应用 (1) 和 (2) 生成的公式才是合式公式.

谓词公式

Definition 2.1

- 不出现命题联结词和量词的谓词填式称为谓词演算的原子公式. 简称原子谓词公式.

  例如 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

- 由下列递归规则生成的公式称为谓词演算的合式公式(简称谓词公式):
  1. 原子谓词公式是合式公式;
  2. 若 A 和 B 是合式公式, 则 $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \rightleftarrows B$, $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ 是合式公式;
  3. 只有有限步应用 (1) 和 (2) 生成的公式才是合式公式.

☞ 定义方式与命题演算的合式公式相同.

括号的问题

谓词合式公式表达中括号的使用:

- 与第一章中讨论命题公式时的约定相同: 最外层的括号可以省略.

括号的问题

谓词合式公式表达中括号的使用:

- 与第一章中讨论命题公式时的约定相同: 最外层的括号可以省略.
- 量词后面接原子公式, 括号省略.

括号的问题

谓词合式公式表达中括号的使用:

- 与第一章中讨论命题公式时的约定相同: 最外层的括号可以省略.
- 量词后面接原子公式, 括号省略.
  例如, $(\forall x)\big(P(x)\big)$ 总是写为 $(\forall x)P(x)$.

括号的问题

谓词合式公式表达中括号的使用:

- 与第一章中讨论命题公式时的约定相同: 最外层的括号可以省略.
- 量词后面接原子公式, 括号省略.

  例如, $(\forall x)\big(P(x)\big)$ 总是写为 $(\forall x)P(x)$.
- 量词后面接非原子公式, 则括号不能省略.

括号的问题

谓词合式公式表达中括号的使用:

- 与第一章中讨论命题公式时的约定相同: 最外层的括号可以省略.
- 量词后面接原子公式, 括号省略.

  例如, $(\forall x)\big(P(x)\big)$ 总是写为 $(\forall x)P(x)$.
- 量词后面接非原子公式, 则括号不能省略.

  例如, $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ 不能写成 $(\forall x)P(x) \vee Q(x)$.

Example 2.2

尽管有人聪明, 但未必一切人都聪明. $\big(P(x),\ M(x)\big)$

Example 2.2

尽管有人聪明, 但未必一切人都聪明. $\big(P(x),\ M(x)\big)$

解: $\exists x\big(M(x) \wedge P(x)\big) \wedge \neg\Big(\forall x\big(M(x) \to P(x)\big)\Big)$

Example 2.2

尽管有人聪明, 但未必一切人都聪明. $\big(P(x),\ M(x)\big)$

解: $\exists x\big(M(x) \wedge P(x)\big) \wedge \neg\Big(\forall x\big(M(x) \to P(x)\big)\Big)$

Example 2.3

极限的定义: 任给小正数 ε, 则存在一个正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有 $|f(x) - b| < \varepsilon$. 此时即称 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Example 2.2

尽管有人聪明, 但未必一切人都聪明. $\big(P(x),\ M(x)\big)$

解: $\exists x\big(M(x) \wedge P(x)\big) \wedge \neg\Big(\forall x\big(M(x) \to P(x)\big)\Big)$

Example 2.3

极限的定义: 任给小正数 ε, 则存在一个正数 δ, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时有 $|f(x)-b| < \varepsilon$. 此时即称 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

解: 设 $P(x, y)$ 表示 "x 大于 y", $Q(x, y)$ 表示 "x 小于 y".

Example 2.2

尽管有人聪明, 但未必一切人都聪明. $\big(P(x),\ M(x)\big)$

解: $\exists x\big(M(x) \wedge P(x)\big) \wedge \neg\Big(\forall x\big(M(x) \to P(x)\big)\Big)$

Example 2.3

极限的定义: 任给小正数 ε, 则存在一个正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有 $|f(x) - b| < \varepsilon$. 此时即称 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

解: 设 $P(x, y)$ 表示 "x 大于 y", $Q(x, y)$ 表示 "x 小于 y". 则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ 可表示为:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)\Bigg(\bigg(\Big(P(\varepsilon, 0) \to P(\delta, 0)\Big) \wedge P(|x - a|, 0) \wedge Q(|x - a|, \delta)\bigg) \to Q(|f(x) - b|, \varepsilon)\Bigg)$$

Example 2.4

设 $P(x)$, $L(x)$, $R(x, y, z)$ 和 $E(x, y)$ 分别表示 “x 是一个点”, “x 是一条直线”, “z 通过 x 和 y”, “$x = y$”.

Example 2.4

设 $P(x)$, $L(x)$, $R(x, y, z)$ 和 $E(x, y)$ 分别表示 "x 是一个点", "x 是一条直线", "z 通过 x 和 y", "$x = y$". 符号化下面的句子:

对每两个点, 有且仅有一条直线通过该两点.

Example 2.4

设 $P(x)$, $L(x)$, $R(x, y, z)$ 和 $E(x, y)$ 分别表示 "x 是一个点", "x 是一条直线", "z 通过 x 和 y", "$x = y$". 符号化下面的句子:
对每两个点, 有且仅有一条直线通过该两点.

解:

$$(\forall x)(\forall y)\Big(\big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x, y)\big)$$

Example 2.4

设 $P(x)$, $L(x)$, $R(x, y, z)$ 和 $E(x, y)$ 分别表示 "x 是一个点", "x 是一条直线", "z 通过 x 和 y", "$x = y$". 符号化下面的句子:
对每两个点, 有且仅有一条直线通过该两点.

解:

$$(\forall x)(\forall y)\Big(\big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x, y)\big) \\ \rightarrow (\exists! z)\big(L(z) \wedge R(x, y, z)\big)\Big)$$

: 符号 " $\exists!$ " 表示 "有且仅有一个".

Example 2.4

设 $P(x)$, $L(x)$, $R(x, y, z)$ 和 $E(x, y)$ 分别表示 "x 是一个点", "x 是一条直线", "z 通过 x 和 y", "$x = y$". 符号化下面的句子:
对每两个点, 有且仅有一条直线通过该两点.

解:

$$
(\forall x)(\forall y)\Big(\big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x, y)\big) \\
\rightarrow (\exists! z)\big(L(z) \wedge R(x, y, z)\big)\Big)
$$

: 符号 " $\exists!$ " 表示 "有且仅有一个".
$(\exists! x)P(x)$ 表示: "存在惟一的 x 使 $P(x)$ 为真".

指导变元 & 作用域

- 指导变元 —— 把 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的变元 x 叫做相应量词的指导变元(或作用变元).

指导变元 & 作用域

- 指导变元 —— 把 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的变元 x 叫做相应量词的指导变元(或作用变元).
- 作用域 —— 把紧跟在 $\forall x$ 或 $\exists x$ 后面并用圆括号括起来的公式, 或者没有圆括号括着的原子公式, 称为相应量词的作用域(或辖域).

指导变元 & 作用域

- 指导变元 —— 把 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的变元 x 叫做相应量词的指导变元(或作用变元).
- 作用域 —— 把紧跟在 $\forall x$ 或 $\exists x$ 后面并用圆括号括起来的公式, 或者没有圆括号括着的原子公式, 称为相应量词的作用域(或辖域).

  比如,

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

  指导变元 x 的作用域是 $P(x) \vee Q(x)$.

自由变元 & 约束变元

- 约束变元 —— 在量词作用域中出现的、与指导变元相同的变元, 称为约束变元. 相应变元的出现, 称为约束出现.

自由变元 & 约束变元

- 约束变元 —— 在量词作用域中出现的、与指导变元相同的变元, 称为约束变元. 相应变元的出现, 称为约束出现.
- 自由变元 —— 除约束变元外的一切变元, 称为自由变元. 相应变元的出现称为自由出现.

自由变元 & 约束变元

- 约束变元 —— 在量词作用域中出现的、与指导变元相同的变元, 称为约束变元. 相应变元的出现, 称为约束出现.
- 自由变元 —— 除约束变元外的一切变元, 称为自由变元. 相应变元的出现称为自由出现.

  比如,

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x)$$

  其中 $P(x)$ 内的 x 是约束变元, 而 $Q(x)$ 内的 x 是自由变元.

约束变元换名规则

- 换名的原因: 为了避免一个变元既是自由变元又是约束变元可能引起的混淆.

约束变元换名规则

- 换名的原因: 为了避免一个变元既是自由变元又是约束变元可能引起的混淆. 比如:

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x)$$

容易在含义上误会为

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

约束变元换名规则

- 换名的原因: 为了避免一个变元既是自由变元又是约束变元可能引起的混淆. 比如:

$$(\forall x)P(x) \lor Q(x)$$

容易在含义上误会为

$$(\forall x)\big(P(x) \lor Q(x)\big)$$

- 换名规则: 一个公式中的约束变元可以更改如下:

约束变元换名规则

- 换名的原因: 为了避免一个变元既是自由变元又是约束变元可能引起的混淆. 比如:

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x)$$

容易在含义上误会为

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

- 换名规则: 一个公式中的约束变元可以更改如下:
  1. 若要换名, 则该变元在量词及其作用域中的所有出现均需一起改变, 其余部分不变.

约束变元换名规则

- 换名的原因：为了避免一个变元既是自由变元又是约束变元可能引起的混淆. 比如:

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x)$$

容易在含义上误会为

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

- 换名规则: 一个公式中的约束变元可以更改如下:
  1. 若要换名, 则该变元在量词及其作用域中的所有出现均需一起改变, 其余部分不变.
  2. 换名时所选用的符号必须是量词作用域内未出现的符号, 最好是公式中未出现的符号.

换名规则

Example 3.1

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\forall y)P(y) \vee Q(x); \tag{1}$$

换名规则

Example 3.1

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\forall y)P(y) \vee Q(x); \tag{1}$$

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x,y)\big) \wedge R(x) \vee S(z) \Leftrightarrow (\forall w)\big(P(w) \vee Q(w,y)\big) \wedge R(x) \vee S(z). \tag{2}$$

换名规则

Example 3.1

$$(\forall x)P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\forall y)P(y) \vee Q(x); \tag{1}$$

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x,y)\big) \wedge R(x) \vee S(z) \Leftrightarrow (\forall w)\big(P(w) \vee Q(w,y)\big) \wedge R(x) \vee S(z). \tag{2}$$

但注意:

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x,y)\big) \wedge R(x) \vee S(z) \not\Leftrightarrow (\forall y)\big(P(y) \vee Q(y,y)\big) \wedge R(x) \vee S(z). \tag{3}$$

自由变元代入规则

- 自由变元的代入, 即自由变元的改名.

自由变元代入规则

- 自由变元的代入, 即自由变元的改名.
- 自由变元代入规则:
  1. 对于谓词公式中的自由变元可以代入, 代入时需要对公式中出现该自由变元的每一处进行代入.

自由变元代入规则

- 自由变元的代入, 即自由变元的改名.
- 自由变元代入规则:
  1. 对于谓词公式中的自由变元可以代入, 代入时需要对公式中出现该自由变元的每一处进行代入.
  2. 用以代入的变元与原公式中所有变元的名称不能相同.

习题

对下列谓词公式中的自由变元进行代入.

a) $\big(\exists y\, A(x,\ y) \to \forall x\, B(x,\ z)\big) \wedge \exists x \forall z\, C(x,\ y,\ z)$.

b) $\big(\forall y\, P(x,\ y) \wedge \exists z\, Q(x,\ z)\big) \vee \forall x\, R(x,\ y)$.

习题

对下列谓词公式中的自由变元进行代入.

a) $\big(\exists y\, A(x,\ y) \to \forall x\, B(x,\ z)\big) \wedge \exists x \forall z\, C(x,\ y,\ z)$.

b) $\big(\forall y\, P(x,\ y) \wedge \exists z\, Q(x,\ z)\big) \vee \forall x\, R(x,\ y)$.

解: a) $\big(\exists y\, A(u,\ y) \to \forall x\, B(x,\ v)\big) \wedge \exists x \forall z\, C(x,\ w,\ z)$.

习题

对下列谓词公式中的自由变元进行代入.

a) $\big(\exists y\, A(x,\ y) \to \forall x\, B(x,\ z)\big) \wedge \exists x \forall z\, C(x,\ y,\ z)$.

b) $\big(\forall y\, P(x,\ y) \wedge \exists z\, Q(x,\ z)\big) \vee \forall x\, R(x,\ y)$.

解: a) $\big(\exists y\, A(u,\ y) \to \forall x\, B(x,\ v)\big) \wedge \exists x \forall z\, C(x,\ w,\ z)$.

b) $\big(\forall y\, P(u,\ y) \wedge \exists z\, Q(v,\ z)\big) \vee \forall x\, R(x,\ w)$.

- 设论域为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n) \tag{4}$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n) \tag{5}$$

- 设论域为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n) \tag{4}$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n) \tag{5}$$

- 量词对变元的约束, 往往与量词的出现顺序有关, 约定 “量词按从左到右的顺序读出”.

Example 3.2

如果论域是集合 $\{a, b, c\}$, 试消去下面公式中的量词:

1. $(\forall x)P(x)$;
2. $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x)$;
3. $(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x)$.

Example 3.2

如果论域是集合 $\{a, b, c\}$, 试消去下面公式中的量词:

1. $(\forall x)P(x)$;
2. $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x)$;
3. $(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x)$.

解: ① $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$.

Example 3.2

如果论域是集合 $\{a, b, c\}$, 试消去下面公式中的量词:

1. $(\forall x)P(x)$;
2. $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x)$;
3. $(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x)$.

解: ① $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$.

② $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x) \Leftrightarrow R(a) \wedge R(b) \wedge R(c) \wedge S(a) \wedge S(b) \wedge S(c)$.

Example 3.2

如果论域是集合 $\{a,\ b,\ c\}$, 试消去下面公式中的量词:

1. $(\forall x)P(x)$;
2. $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x)$;
3. $(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x)$.

解: ① $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$.

② $(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)S(x) \Leftrightarrow R(a) \wedge R(b) \wedge R(c) \wedge S(a) \wedge S(b) \wedge S(c)$.

③ $(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x) \Leftrightarrow \big(R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)\big) \wedge \big(S(a) \vee S(b) \vee S(c)\big)$

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x)$: $x=1$; $Q(x)$: $x=2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 P: $2>1$; $Q(x)$: $x \leqslant 3$; $R(x)$: $x>5$ 而 a : 5; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x): x=1$; $Q(x): x=2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 $P: 2>1$; $Q(x): x \leqslant 3$; $R(x): x>5$ 而 $a: 5$; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

解: ① $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P(1) \vee Q(1)\big) \wedge \big(P(2) \vee Q(2)\big)$,

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x):\ x=1$; $Q(x):\ x=2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 $P:\ 2>1$; $Q(x):\ x \leqslant 3$; $R(x):\ x>5$ 而 $a:\ 5$; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

解: ① $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P(1) \vee Q(1)\big) \wedge \big(P(2) \vee Q(2)\big)$,

而 $P(1)$ 为 **T**, $P(2)$ 为 **F**; $Q(1)$ 为 **F**, $Q(2)$ 为 **T**.

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x)$: $x=1$; $Q(x)$: $x=2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 P : $2>1$; $Q(x)$: $x \leqslant 3$; $R(x)$: $x>5$ 而 a : 5; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

解: ① $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P(1) \vee Q(1)\big) \wedge \big(P(2) \vee Q(2)\big)$,
而 $P(1)$ 为 **T**, $P(2)$ 为 **F**; $Q(1)$ 为 **F**, $Q(2)$ 为 **T**. 所以

$$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow (\mathbf{T} \vee \mathbf{F}) \wedge (\mathbf{F} \vee \mathbf{T}) \Leftrightarrow \mathbf{T}.$$

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x):\ x=1$; $Q(x):\ x=2$; 论域是 $\{1,\ 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 $P:\ 2>1$; $Q(x):\ x \leqslant 3$; $R(x):\ x>5$ 而 $a:\ 5$; 论域是 $\{-2,\ 3,\ 6\}$.

解: ② $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P \to Q(-2)\big) \wedge \big(P \to Q(3)\big) \wedge \big(P \to Q(6)\big)$,

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x)$: $x = 1$; $Q(x)$: $x = 2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 P : $2 > 1$; $Q(x)$: $x \leqslant 3$; $R(x)$: $x > 5$ 而 a : 5; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

解: ② $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P \to Q(-2)\big) \wedge \big(P \to Q(3)\big) \wedge \big(P \to Q(6)\big)$,
其中 P 为 **T**, $Q(-2)$ 为 **T**; $Q(3)$ 为 **T**, $Q(6)$ 为 **F**.

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x)$: $x=1$; $Q(x)$: $x=2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \rightarrow Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 P : $2>1$; $Q(x)$: $x \leqslant 3$; $R(x)$: $x>5$ 而 a : 5; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

解: ② $(\forall x)\big(P \rightarrow Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P \rightarrow Q(-2)\big) \wedge \big(P \rightarrow Q(3)\big) \wedge \big(P \rightarrow Q(6)\big)$, 其中 P 为 **T**, $Q(-2)$ 为 **T**; $Q(3)$ 为 **T**, $Q(6)$ 为 **F**. 所以

$$(\forall x)\big(P \rightarrow Q(x)\big) \Leftrightarrow (\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}) \wedge (\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}) \wedge (\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{F}) \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

习题. 寻求下列公式的真值:

1. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$, 其中 $P(x)$: $x = 1$; $Q(x)$: $x = 2$; 论域是 $\{1, 2\}$.
2. $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a)$, 其中 P: $2 > 1$; $Q(x)$: $x \leqslant 3$; $R(x)$: $x > 5$ 而 a : 5; 论域是 $\{-2, 3, 6\}$.

解: ② $(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \Leftrightarrow \big(P \to Q(-2)\big) \wedge \big(P \to Q(3)\big) \wedge \big(P \to Q(6)\big)$, 其中 P 为 $\mathbf{T}$, $Q(-2)$ 为 $\mathbf{T}$; $Q(3)$ 为 $\mathbf{T}$, $Q(6)$ 为 $\mathbf{F}$. 所以

$$(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \Leftrightarrow (\mathbf{T} \to \mathbf{T}) \wedge (\mathbf{T} \to \mathbf{T}) \wedge (\mathbf{T} \to \mathbf{F}) \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

又 $R(a)$ 为 $\mathbf{F}$, 所以

$$(\forall x)\big(P \to Q(x)\big) \vee R(a) \Leftrightarrow \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}.$$

前束范式

Definition 3.3

一个公式, 如果量词均在全式的开头, 它们的作用域延伸到整个公式的末尾, 则该公式叫做前束范式.

前束范式

Definition 3.3

一个公式, 如果量词均在全式的开头, 它们的作用域延伸到整个公式的末尾, 则该公式叫做前束范式.

前束范式可记为下述形式:

$$(\Box v_1)(\Box v_2)\cdots(\Box v_n)A \tag{6}$$

其中 $\Box$ 是量词 $\forall$ 或 $\exists$; v_i 是个体变元; A 是没有量词的谓词公式.

Example 3.4

例如

$$(\forall x)(\forall y)\big(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)\big), \tag{7}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(F(x) \wedge G(y) \wedge H(z) \to L(x,y,z)\big) \tag{8}$$

等公式都是前束范式.

Example 3.4

例如

$$(\forall x)(\forall y)\big(F(x) \wedge G(y) \to H(x, y)\big), \tag{7}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(F(x) \wedge G(y) \wedge H(z) \to L(x, y, z)\big) \tag{8}$$

等公式都是前束范式.

而

$$(\forall x)\Big(F(x) \to (\exists y)\big(G(y) \wedge H(x, y)\big)\Big), \tag{9}$$

$$(\exists x)\Big(F(x) \wedge (\forall y)\big(G(y) \to H(x, y)\big)\Big) \tag{10}$$

等都不是前束范式.

Theorem 3.5

任意一个谓词公式, 均和一个前束范式等价.

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x)$;
2. $(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$.

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x)F(x) \land \neg(\exists x)G(x)$;
2. $(\forall x)F(x) \lor \neg(\exists x)G(x)$.

解: ①

$$(\forall x)F(x) \land \neg(\exists x)G(x) \Leftrightarrow (\forall x)F(x) \land \neg(\exists y)G(y) \qquad \text{(换名)}$$

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x)F(x) \land \neg(\exists x)G(x)$;
2. $(\forall x)F(x) \lor \neg(\exists x)G(x)$.

解: ①

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \land \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \land \neg(\exists y)G(y) && \text{(换名)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \land (\forall y)\neg G(y) && \text{(量词转化)}
\end{aligned}
$$

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x) F(x) \wedge \neg(\exists x) G(x)$;
2. $(\forall x) F(x) \vee \neg(\exists x) G(x)$.

解: ①

$$\begin{aligned}
(\forall x) F(x) \wedge \neg(\exists x) G(x) &\Leftrightarrow (\forall x) F(x) \wedge \neg(\exists y) G(y) && \text{(换名)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x) F(x) \wedge (\forall y) \neg G(y) && \text{(量词转化)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \wedge (\forall y) \neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}$$

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x)$;
2. $(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$.

解: ①

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists y)G(y) && \text{(换名)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge (\forall y)\neg G(y) && \text{(量词转化)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \wedge (\forall y)\neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big(F(x) \wedge \neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}
$$

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x)$;
2. $(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$.

解: ①

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists y)G(y) && \text{(换名)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge (\forall y)\neg G(y) && \text{(量词转化)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \wedge (\forall y)\neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big(F(x) \wedge \neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}
$$

或者

$$(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x) \Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge (\forall x)\neg G(x) \qquad \text{(量词转化)}$$

Example 3.6

求下面公式的前束范式:

1. $(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x)$;
2. $(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$.

解: ①

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists y)G(y) && \text{(换名)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge (\forall y)\neg G(y) && \text{(量词转化)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \wedge (\forall y)\neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big(F(x) \wedge \neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \wedge \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \wedge (\forall x)\neg G(x) && \text{(量词转化)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \wedge \neg G(x)\big) && (E_{24})
\end{aligned}
$$

②

$$(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) \Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)\neg G(x) \qquad \text{(量词转化)}$$

②

$$(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) \Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)\neg G(x) \quad \text{(量词转化)}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall y)\neg G(y) \quad \text{(换名)}$$

②

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)\neg G(x) && \text{(量词转化)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall y)\neg G(y) && \text{(换名)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \vee (\forall y)\neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)\neg G(x) && \text{(量词转化)}\\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall y)\neg G(y) && \text{(换名)}\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \vee (\forall y)\neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}\\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big(F(x) \vee \neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)\neg G(x) && \text{(量词转化)}\\
&\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall y)\neg G(y) && \text{(换名)}\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \vee (\forall y)\neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}\\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big(F(x) \vee \neg G(y)\big) && \text{(扩张作用域)}
\end{aligned}
$$

问: ② 的下述求法是否正确?

$$
\begin{aligned}
(\forall x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) &\Leftrightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)\neg G(x) && (11)\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(F(x) \vee \neg G(x)\big). && (12)
\end{aligned}
$$

1. 谓词逻辑命题的符号化
2. 谓词公式及其真值
3. 谓词公式的前束范式
4. 重言蕴含式与推理规则
   - 重言蕴含式
   - 推理规则

谓词公式的等价

谓词公式的赋值

谓词公式常由命题变元和个体变元组成.[a] 当个体变元由确定的个体所取代, 命题变元由确定的命题所取代时, 就称作对谓词公式赋值.

[a] 例如谓词公式 $(\forall x)\big(A(x) \vee B\big)$, 包含命题变元和个体变元.

谓词公式的等价

谓词公式的赋值

谓词公式常由命题变元和个体变元组成.[a] 当个体变元由确定的个体所取代, 命题变元由确定的命题所取代时, 就称作对谓词公式赋值.

[a] 例如谓词公式 $(\forall x)\big(A(x) \vee B\big)$, 包含命题变元和个体变元.

Definition 4.1

给定任何两个谓词公式 Wff A 和 Wff B, 设它们有共同的个体域 E, 若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值, 所得命题的真值都相同, 则称谓词公式 A 和 B 在 E 上是等价的, 并记作: $A \Leftrightarrow B$.

有效, 不可满足, 可满足

Definition 4.2

给定任意谓词公式 A, 其个体域为 E, 如果对于 A 的所有赋值,

1. A 都为真, 则称 A 有效或永真;

有效, 不可满足, 可满足

Definition 4.2

给定任意谓词公式 A, 其个体域为 E, 如果对于 A 的所有赋值,

1. A 都为真, 则称 A 有效或永真;
2. A 在所有赋值下都为假, 则称 A 永假或不可满足;

有效, 不可满足, 可满足

Definition 4.2

给定任意谓词公式 A, 其个体域为 E, 如果对于 A 的所有赋值,

1. A 都为真, 则称 A 有效或永真;
2. A 在所有赋值下都为假, 则称 A 永假或不可满足;
3. A 至少在一种赋值下为真, 则称 A 可满足;

有效, 不可满足, 可满足

Definition 4.2

给定任意谓词公式 A, 其个体域为 E, 如果对于 A 的所有赋值,

1. A 都为真, 则称 A 有效或永真;
2. A 在所有赋值下都为假, 则称 A 永假或不可满足;
3. A 至少在一种赋值下为真, 则称 A 可满足;

命题公式的推广

命题演算中的等价公式表和蕴含公式表都可以推广到谓词演算中使用.

命题公式的推广

命题演算中的等价公式表和蕴含公式表都可以推广到谓词演算中使用. 例如:

$$(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \tag{13}$$

命题公式的推广

命题演算中的等价公式表和蕴含公式表都可以推广到谓词演算中使用. 例如:

$$(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \tag{13}$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)R(x,\ y) \Leftrightarrow \neg\big(\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists y)R(x,\ y)\big) \tag{14}$$

命题公式的推广

命题演算中的等价公式表和蕴含公式表都可以推广到谓词演算中使用. 例如:

$$(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \tag{13}$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)R(x,\ y) \Leftrightarrow \neg\big(\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists y)R(x,\ y)\big) \tag{14}$$

$$(\exists x)H(x,\ y) \wedge \neg(\exists x)H(x,\ y) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{15}$$

量词与联结词 $\neg$ 之间的关系

量词转化律:

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \tag{16}$$

$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \tag{17}$$

即, 出现在量词之前的否定, 不是否定该量词, 而是否定被量化了的整个命题.

量词与联结词 ¬ 之间的关系

量词转化律:

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \tag{16}$$

$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \tag{17}$$

即, 出现在量词之前的否定, 不是否定该量词, 而是否定被量化了的整个命题.

例如, “这个班所有的同学都参加这次活动”, 要否定这个命题, 只需要说明“存在一个同学没有参加活动” 就可以了, 而不是 “所有的同学都没有参加这次活动”.

量词与联结词 ¬ 之间的关系

量词转化律:

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \tag{16}$$

$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \tag{17}$$

即, 出现在量词之前的否定, 不是否定该量词, 而是否定被量化了的整个命题.

例如, "这个班所有的同学都参加这次活动", 要否定这个命题, 只需要说明 "存在一个同学没有参加活动" 就可以了, 而不是 "所有的同学都没有参加这次活动". 即

$$\neg(\forall x)P(x) \not\Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x).$$

量词与联结词 $\neg$ 之间的关系

再比如, "任意的 $x \in E$, x 是实数", 其否定为

"存在 $x \in E$, x 不是实数".

量词与联结词 $\neg$ 之间的关系

再比如, “任意的 $x \in E$, x 是实数”, 其否定为

“存在 $x \in E$, x 不是实数”.

而不是

“任意的 $x \in E$, x 不是实数”.

量词与联结词 $\neg$ 之间的关系

再比如, “任意的 $x \in E$, x 是实数”, 其否定为

“存在 $x \in E$, x 不是实数”.

而不是

“任意的 $x \in E$, x 不是实数”.

量词的转化律, 可以在有限个体域上证明.

再比如, "任意的 $x \in E$, x 是实数", 其否定为

"存在 $x \in E$, x 不是实数".

而不是

"任意的 $x \in E$, x 不是实数".

量词的转化律, 可以在有限个体域上证明.
设个体域中的个体变元为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg\big(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)\big) \tag{18}$$

量词与联结词 ¬ 之间的关系

再比如, “任意的 $x \in E$, x 是实数”, 其否定为

“存在 $x \in E$, x 不是实数”.

而不是

“任意的 $x \in E$, x 不是实数”.

量词的转化律, 可以在有限个体域上证明.

设个体域中的个体变元为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg\big(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)\big) \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \cdots \vee \neg A(a_n) \tag{19}$$

量词与联结词 $\neg$ 之间的关系

再比如, "任意的 $x \in E$, x 是实数", 其否定为

"存在 $x \in E$, x 不是实数".

而不是

"任意的 $x \in E$, x 不是实数".

量词的转化律, 可以在有限个体域上证明.

设个体域中的个体变元为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x)A(x) &\Leftrightarrow \neg\big(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)\big) && (18)\\
&\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \cdots \vee \neg A(a_n) && (19)\\
&\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) && (20)
\end{aligned}$$

量词作用域的扩张与收缩

量词的作用域中, 常有合取或析取项, 如果其中一个为命题, 则可以将该命题移至量词作用域之外.

量词作用域的扩张与收缩

量词的作用域中, 常有合取或析取项, 如果其中一个为命题, 则可以将该命题移至量词作用域之外. 如

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B, \tag{21}$$

量词作用域的扩张与收缩

量词的作用域中, 常有合取或析取项, 如果其中一个为命题, 则可以将该命题移至量词作用域之外. 如

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B, \tag{21}$$

$$(\forall x)\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B, \tag{22}$$

量词作用域的扩张与收缩

量词的作用域中, 常有合取或析取项, 如果其中一个为命题, 则可以将该命题移至量词作用域之外. 如

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B, \tag{21}$$

$$(\forall x)\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B, \tag{22}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B, \tag{23}$$

量词作用域的扩张与收缩

量词的作用域中, 常有合取或析取项, 如果其中一个为命题, 则可以将该命题移至量词作用域之外. 如

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B, \tag{21}$$

$$(\forall x)\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B, \tag{22}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B, \tag{23}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B. \tag{24}$$

量词作用域的扩张与收缩

量词的作用域中, 常有合取或析取项, 如果其中一个为命题, 则可以将该命题移至量词作用域之外. 如

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B, \tag{21}$$

$$(\forall x)\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B, \tag{22}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B, \tag{23}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B. \tag{24}$$

或者, 量词的作用域中有自由变元时, 也有类似的扩张或收缩. 例如:

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B(y)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B(y).$$

Theorem 4.3

下列等价式成立:

$$(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big) \tag{25}$$

Theorem 4.3

下列等价式成立:

$$(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big) \tag{25}$$

$$(\exists x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B\big) \tag{26}$$

Theorem 4.3

下列等价式成立:

$$(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big) \tag{25}$$

$$(\exists x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B\big) \tag{26}$$

$$B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big) \tag{27}$$

Theorem 4.3

下列等价式成立:

$$(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big) \tag{25}$$

$$(\exists x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B\big) \tag{26}$$

$$B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big) \tag{27}$$

$$B \to (\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\big(B \to A(x)\big) \tag{28}$$

Example 4.4

证明 $(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big)$

Example 4.4

证明 $(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big)$

证:

$$(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee B \qquad (E_{16})$$

Example 4.4

证明 $(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big)$

证:

$$\begin{aligned} (\forall x)A(x) \to B &\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee B && (E_{16}) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x)\big) \vee B && (\text{量词转化律}) \end{aligned}$$

Example 4.4

证明 $(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big)$

证:

$$
\begin{aligned}
(\forall x)A(x) \to B &\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee B && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x)\big) \vee B && (\text{量词转化律}) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x) \vee B\big) && (\text{作用域的扩张})
\end{aligned}
$$

Example 4.4

证明 $(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big)$

证:

$$
\begin{aligned}
(\forall x)A(x) \to B &\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee B && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x)\big) \vee B && (\text{量词转化律}) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x) \vee B\big) && (\text{作用域的扩张}) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\big(A(x) \to B\big) && (E_{16})
\end{aligned}
$$

Example 4.5

证明 $B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big)$

Example 4.5

证明 $B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big)$

证:

$$B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg B \vee (\forall x)A(x) \qquad (E_{16})$$

Example 4.5

证明 $B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big)$

证:

$$B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg B \vee (\forall x)A(x) \qquad (E_{16})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\big(\neg B \vee A(x)\big) \qquad \text{(作用域的扩张)}$$

Example 4.5

证明 $B \to (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big)$

证:

$$
\begin{aligned}
B \to (\forall x)A(x) &\Leftrightarrow \neg B \vee (\forall x)A(x) && (E_{16})\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(\neg B \vee A(x)\big) && (\text{作用域的扩张})\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(B \to A(x)\big) && (E_{16})
\end{aligned}
$$

量词与命题联结词之间的一些等价式

量词分配等价式:

$$(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x) \tag{29}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \lor B(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \lor (\exists x)B(x) \tag{30}$$

量词与命题联结词之间的一些等价式

量词分配等价式:

$$(\forall x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \tag{29}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \tag{30}$$

注意:

$$(\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \not\Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \tag{31}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \not\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{32}$$

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \lor (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \lor B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \land B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \land (\exists x)B(x) \tag{34}$$

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

- 则 $(\exists x)A(x)$ 为真, $(\exists x)B(x)$ 为真, 故 $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 为真;

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

- 则 $(\exists x)A(x)$ 为真, $(\exists x)B(x)$ 为真, 故 $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 为真; 但 $(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ 为假.

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

- 则 $(\exists x)A(x)$ 为真, $(\exists x)B(x)$ 为真, 故 $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 为真; 但 $(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ 为假. 所以 (34) 式反过来不成立.

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

- 则 $(\exists x)A(x)$ 为真, $(\exists x)B(x)$ 为真, 故 $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 为真; 但 $(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ 为假. 所以 (34) 式反过来不成立.
- 类似地, $(\forall x)A(x)$ 为假, 且 $(\forall x)B(x)$ 为假, 故 $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ 为假;

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \lor (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \lor B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \land B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \land (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

- 则 $(\exists x)A(x)$ 为真, $(\exists x)B(x)$ 为真, 故 $(\exists x)A(x) \land (\exists x)B(x)$ 为真;
  但 $(\exists x)\big(A(x) \land B(x)\big)$ 为假. 所以 (34) 式反过来不成立.
- 类似地, $(\forall x)A(x)$ 为假, 且 $(\forall x)B(x)$ 为假, 故 $(\forall x)A(x) \lor (\forall x)B(x)$ 为假;
  但 $(\forall x)(A(x) \lor B(x))$ 为真,

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \tag{33}$$

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \tag{34}$$

Example 4.6

设个体域为自然数集合, $A(x)$: x 为奇数; $B(x)$: x 为偶数.

- 则 $(\exists x)A(x)$ 为真, $(\exists x)B(x)$ 为真, 故 $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 为真; 但 $(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ 为假. 所以 (34) 式反过来不成立.
- 类似地, $(\forall x)A(x)$ 为假, 且 $(\forall x)B(x)$ 为假, 故 $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ 为假; 但 $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ 为真, 所以 (33) 式反过来也不成立.

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

类似还有

$$(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x) \tag{35}$$

$$(\forall x)\big(A(x) \rightleftarrows B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightleftarrows (\forall x)B(x) \tag{36}$$

量词与命题联结词之间的一些蕴含式

类似还有

$$(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x) \tag{35}$$

$$(\forall x)\big(A(x) \rightleftarrows B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightleftarrows (\forall x)B(x) \tag{36}$$

后面我们会给出 (35) 式的证明.

Example 4.7

证明 E_{29}： $(\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x)$.

Example 4.7

证明 $E_{29}: (\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x).$

证:

$$(\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x) \vee B(x)\big) \qquad (E_{16})$$

Example 4.7

证明 $E_{29}: (\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x).$

证:

$$(\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x) \lor B(x)\big) \qquad (E_{16})$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \lor (\exists x)B(x) \qquad (\text{量词的分配})$$

Example 4.7

证明 E_{29} : $(\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x)$.

证:

$$
\begin{aligned}
(\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big) &\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x) \vee B(x)\big) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \vee (\exists x)B(x) && (\text{量词的分配}) \\
&\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee (\exists x)B(x) && (\text{量词的转化律})
\end{aligned}
$$

Example 4.7

证明 $E_{29}:\ (\exists x)\big(A(x)\to B(x)\big)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x).$

证:

$$
\begin{aligned}
(\exists x)\big(A(x)\to B(x)\big) &\Leftrightarrow (\exists x)\big(\neg A(x)\vee B(x)\big) && (E_{16})\\
&\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)\vee(\exists x)B(x) && (\text{量词的分配})\\
&\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x) && (\text{量词的转化律})\\
&\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x) && (E_{16})
\end{aligned}
$$

Example 4.8

证明 I_{19} : $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$.

Example 4.8

证明 $I_{19}: (\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$.

证:

$$(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Leftrightarrow \neg\big((\exists x)A(x)\big) \vee (\forall x)B(x) \qquad (E_{16})$$

Example 4.8

证明 $I_{19}:\ (\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big).$

证:

$$
\begin{aligned}
(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) &\Leftrightarrow \neg\big((\exists x)A(x)\big) \vee (\forall x)B(x) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \vee (\forall x)B(x) && (\text{量词转化律})
\end{aligned}
$$

Example 4.8

证明 I_{19}：$(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$.

证:

$$
\begin{aligned}
(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) &\Leftrightarrow \neg\big((\exists x)A(x)\big) \vee (\forall x)B(x) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \vee (\forall x)B(x) && (\text{量词转化律}) \\
&\Rightarrow (\forall x)(\neg A(x) \vee B(x)) && (I_{17})
\end{aligned}
$$

Example 4.8

证明 I_{19} : $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$.

证:

$$
\begin{aligned}
(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) &\Leftrightarrow \neg\big((\exists x)A(x)\big) \vee (\forall x)B(x) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \vee (\forall x)B(x) && (\text{量词转化律}) \\
&\Rightarrow (\forall x)(\neg A(x) \vee B(x)) && (I_{17}) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) && (E_{16})
\end{aligned}
$$

多个量词的使用

等价式:

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y) \tag{37}$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y) \tag{38}$$

多个量词的使用

等价式:

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y) \tag{37}$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y) \tag{38}$$

蕴含式:

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y) \tag{39}$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y) \tag{40}$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y) \tag{41}$$

多个量词的使用

等价式:

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y) \tag{37}$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y) \tag{38}$$

蕴含式:

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y) \tag{39}$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y) \tag{40}$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y) \tag{41}$$

Example 4.9

设个体域为实数集合, $P(x, y) : x - y = 1$, 则 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 为真, 而 $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$ 为假, 所以 (40) 反过来不成立.

谓词演算的推理规则

- 全称指定规则 (US, Universal Specification):

$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore \quad P(c)} \tag{42}$$

- 全称推广规则 (UG, Universal Generalization):

$$\frac{P(x)}{\therefore \quad (\forall x)P(x)} \tag{43}$$

谓词演算的推理规则

- 存在指定规则 (ES, Existential Specification):

$$\begin{array}{l} \quad (\exists x)P(x) \\ \hline \therefore \quad P(c) \end{array} \tag{44}$$

- 存在推广规则 (EG, Existential Generalization):

$$\begin{array}{l} \quad P(c) \\ \hline \therefore \quad (\exists x)P(x) \end{array} \tag{45}$$

关于 US, ES, EG, UG 的注解

- US, ES 又叫删除量词规则, 其作用是在推导中删除量词. 一旦删除了量词, 就可用命题演算的各种规则与方法进行推导.

关于 US, ES, EG, UG 的注解

- US, ES 又叫删除量词规则, 其作用是在推导中删除量词. 一旦删除了量词, 就可用命题演算的各种规则与方法进行推导.
- UG, EG 的作用则是在推导过程中添加量词, 使结论呈量化形式.

关于 US, ES, EG, UG 的注解

- US, ES 又叫删除量词规则, 其作用是在推导中删除量词. 一旦删除了量词, 就可用命题演算的各种规则与方法进行推导.
- UG, EG 的作用则是在推导过程中添加量词, 使结论呈量化形式.
- 全称量词与存在量词的基本差别也突出地体现在删除和添加量词规则使用中.

关于 US, ES, EG, UG 的注解

- US, ES 又叫删除量词规则, 其作用是在推导中删除量词. 一旦删除了量词, 就可用命题演算的各种规则与方法进行推导.
- UG, EG 的作用则是在推导过程中添加量词, 使结论呈量化形式.
- 全称量词与存在量词的基本差别也突出地体现在删除和添加量词规则使用中.

  例如, ES 中 $P(c)$ 的 c 取特定值, 而 US 中 $P(c)$ 的 c 可取任意值. 在 UG 规则使用中更要注意这方面的分析才不会引出错误的结论.

Example 4.10

证明 $(\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big) \land H(s) \Rightarrow M(s)$. 其中

$H(x)$: x 是一个人.

$M(x)$: x 是要死的.

s: 苏格拉底.

Example 4.10

证明 $(\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big) \wedge H(s) \Rightarrow M(s)$. 其中

$H(x)$: x 是一个人.

$M(x)$: x 是要死的.

s: 苏格拉底.

证:

$$(1) \quad (\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big) \qquad\qquad \mathrm{P}$$

Example 4.10

证明 $(\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big) \wedge H(s) \Rightarrow M(s)$. 其中

$H(x)$: x 是一个人.

$M(x)$: x 是要死的.

s: 苏格拉底.

证:

(1)	$(\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big)$	P
(2)	$H(s) \to M(s)$	US(1)

Example 4.10

证明 $(\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big) \wedge H(s) \Rightarrow M(s)$. 其中

$H(x)$: x 是一个人.

$M(x)$: x 是要死的.

s: 苏格拉底.

证:

(1)	$(\forall x)\big(H(x) \to M(x)\big)$	P
(2)	$H(s) \to M(s)$	US(1)
(3)	$H(s)$	P

Example 4.10

证明 $(\forall x)\big(H(x) \rightarrow M(x)\big) \wedge H(s) \Rightarrow M(s)$. 其中

$H(x)$: x 是一个人.

$M(x)$: x 是要死的.

s: 苏格拉底.

证:

(1)	$(\forall x)\big(H(x) \rightarrow M(x)\big)$	P
(2)	$H(s) \rightarrow M(s)$	US(1)
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	T(2),(3) I

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数.

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES(1)

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$	P

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(4)	$F(c) \to G(c)$	US(3)

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c) \rightarrow G(c)$	US(3)
(5)	$G(c)$	T(2),(4) I

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(4)	$F(c) \to G(c)$	US(3)
(5)	$G(c)$	T(2),(4) I
(6)	$(\exists x)G(x)$	EG(5)

Example 4.11

构造下面推理的证明:

任何自然数都是整数; 存在着自然数. 所以存在着整数. 个体域为实数集合 R.

证: 先将原子命题符号化: 设 $F(x)$: x 为自然数; $G(x)$: x 为整数. 则前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)F(x)$; 结论: $(\exists x)G(x)$.

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(4)	$F(c) \to G(c)$	US(3)
(5)	$G(c)$	T(2),(4) I
(6)	$(\exists x)G(x)$	EG(5)

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

$$(1) \quad (\forall x)(F(x) \to G(x)) \qquad \text{P}$$

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

(1)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(2)	$F(c) \to G(c)$	US(1)

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

(1)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(2)	$F(c) \to G(c)$	US(1)
(3)	$(\exists x)F(x)$	P

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

(1)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(2)	$F(c) \to G(c)$	US(1)
(3)	$(\exists x)F(x)$	P
(4)	$F(c)$	ES(3)

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

(1)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(2)	$F(c) \to G(c)$	US(1)
(3)	$(\exists x)F(x)$	P
(4)	$F(c)$	ES(3)
(5)	$G(c)$	T(2),(4) I

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

(1)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(2)	$F(c) \to G(c)$	US(1)
(3)	$(\exists x)F(x)$	P
(4)	$F(c)$	ES(3)
(5)	$G(c)$	T(2),(4) I
(6)	$(\exists x)G(x)$	EG(5)

注意:

- 当既有含存在量词, 又有含全称量词的前提时, 在证明中先引入带存在量词的前提.
- 当有多个含存在量词的前提时, 对每个前提使用 ES 规则所引入的变元应与以前不同.

比如, 如果证明如下进行:

(1)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(2)	$F(c) \to G(c)$	US(1)
(3)	$(\exists x)F(x)$	P
(4)	$F(c)$	ES(3)
(5)	$G(c)$	T(2),(4) I
(6)	$(\exists x)G(x)$	EG(5)

在 (2) 中取 $c = \sqrt{2}$, 则 $F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{2})$ 为真 (前件假), 而 (4) 中 $F(\sqrt{2})$ 为假, 这样从真的前件推出了假的中间结果.

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1) $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$ P

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)(F(x) \land H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \land H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \land H(x))$	P
(2)	$(F(c) \land H(c))$	ES(1)

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(F(c) \wedge H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(F(c) \wedge H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c) \rightarrow G(c)$	US(3)

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(F(c) \wedge H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c) \rightarrow G(c)$	US(3)
(5)	$F(c)$	T(2) I

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(F(c) \wedge H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(4)	$F(c) \to G(c)$	US(3)
(5)	$F(c)$	T(2) I
(6)	$G(c)$	T(4),(5) I

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \to G(x))$, $(\exists x)(F(x) \land H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \land H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \land H(x))$	P
(2)	$(F(c) \land H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \to G(x))$	P
(4)	$F(c) \to G(c)$	US(3)
(5)	$F(c)$	T(2) I
(6)	$G(c)$	T(4),(5) I
(7)	$H(c)$	T(2) I

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(F(c) \wedge H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c) \rightarrow G(c)$	US(3)
(5)	$F(c)$	T(2) I
(6)	$G(c)$	T(4),(5) I
(7)	$H(c)$	T(2) I
(8)	$G(c) \wedge H(c)$	T(6),(7)

Example 4.12

构造下面推理的证明:

前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$, $(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$; 结论: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$

证: (注意, 在证明序列中先引入带存在量词的前提.)

(1)	$(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(F(c) \wedge H(c))$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c) \rightarrow G(c)$	US(3)
(5)	$F(c)$	T(2) I
(6)	$G(c)$	T(4),(5) I
(7)	$H(c)$	T(2) I
(8)	$G(c) \wedge H(c)$	T(6),(7)
(9)	$(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$	EG(8)

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

$$(1) \quad \neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x)) \qquad \text{P}$$

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \to H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \to \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$	P

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$	P
(6)	$G(y) \rightarrow H(y)$	US(5)

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$	P
(6)	$G(y) \rightarrow H(y)$	US(5)
(7)	$G(y) \rightarrow \neg F(y)$	T(6),(4) I

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$	P
(6)	$G(y) \rightarrow H(y)$	US(5)
(7)	$G(y) \rightarrow \neg F(y)$	T(6),(4) I
(8)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$	UG(7)

Example 4.13

构造下面推理的证明: (个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数; 有理数都能表示成分数. 因此, 有理数都不是无理数.

证: 设 $F(x)$: x 为无理数; $G(x)$: x 为有理数, $H(x)$: x 能表示成分数.

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$; 结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$.

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$	P
(6)	$G(y) \rightarrow H(y)$	US(5)
(7)	$G(y) \rightarrow \neg F(y)$	T(6),(4) I
(8)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$	UG(7)

注意: 不能对直接对 $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$ 使用 ES 规则.

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$.

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big).$

证:

$$(1) \quad (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \qquad \mathrm{P}$$

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \land R(x)\big) \land (\exists x)\big(C(x) \land Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \land R(x)\big).$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \land Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \land Q(a)$	ES(2)

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \land R(x)\big) \land (\exists x)\big(C(x) \land Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \land R(x)\big).$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \land Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \land Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \land R(x)\big)$	P

Example 4.14

证明

$$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big).$$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$.

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T(2) I

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$.

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T(2) I
(6)	$W(a) \wedge R(a)$	T(4),(5) I

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big).$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T(2) I
(6)	$W(a) \wedge R(a)$	T(4),(5) I
(7)	$Q(a)$	T(2) I

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big).$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T(2) I
(6)	$W(a) \wedge R(a)$	T(4),(5) I
(7)	$Q(a)$	T(2) I
(8)	$R(a)$	T(6) I

Example 4.14

证明

$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big).$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T(2) I
(6)	$W(a) \wedge R(a)$	T(4),(5) I
(7)	$Q(a)$	T(2) I
(8)	$R(a)$	T(6) I
(9)	$Q(a) \wedge R(a)$	T(7),(8) I

Example 4.14

证明

$$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big) \wedge (\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big).$$

证:

(1)	$(\exists x)\big(C(x) \wedge Q(x)\big)$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(2)
(3)	$(\forall x)\big(C(x) \to W(x) \wedge R(x)\big)$	P
(4)	$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T(2) I
(6)	$W(a) \wedge R(a)$	T(4),(5) I
(7)	$Q(a)$	T(2) I
(8)	$R(a)$	T(6) I
(9)	$Q(a) \wedge R(a)$	T(7),(8) I
(10)	$(\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$	EG

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)$.

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$,

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\,Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\,Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)
(4)	$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$	P

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)
(4)	$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$	P
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	US(4)

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)
(4)	$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$	P
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	US(4)
(6)	$Q(c)$	T(3),(5) I

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\,Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)
(4)	$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$	P
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	US(4)
(6)	$Q(c)$	T(3),(5) I
(7)	$(\exists x)\,Q(x)$	EG(6)

Example 4.15

证明 $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)$.

证: 注意到 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)\,Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\,Q(x)$, 下面使用 CP 规则来证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T(1) E
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)
(4)	$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$	P
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	US(4)
(6)	$Q(c)$	T(3),(5) I
(7)	$(\exists x)\,Q(x)$	EG(6)
(8)	$\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\,Q(x)$	CP

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)
(2)	$A(y)$	US(1)

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)
(2)	$A(y)$	US(1)
(3)	$(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$	P

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)
(2)	$A(y)$	US(1)
(3)	$(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$	P
(4)	$A(y) \to B(y)$	US(3)

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \rightarrow B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)
(2)	$A(y)$	US(1)
(3)	$(\forall x)\big(A(x) \rightarrow B(x)\big)$	P
(4)	$A(y) \rightarrow B(y)$	US(3)
(5)	$B(y)$	T(2),(4)

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)
(2)	$A(y)$	US(1)
(3)	$(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$	P
(4)	$A(y) \to B(y)$	US(3)
(5)	$B(y)$	T(2),(4)
(6)	$(\forall x)B(x)$	UG(5)

Example 4.16 (练习)

证明 $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$.

证: 使用 CP 规则:

(1)	$(\forall x)A(x)$	P(附加前提)
(2)	$A(y)$	US(1)
(3)	$(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$	P
(4)	$A(y) \to B(y)$	US(3)
(5)	$B(y)$	T(2),(4)
(6)	$(\forall x)B(x)$	UG(5)
(7)	$(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$	CP